Резюмета на научните публикации

за участие в конкурса за професор
по професионално направление 5.2 "Електротехника, електроника и автоматика",
специалност "Приложение на принципите и методите на кибернетиката в различни области на науката (техническа)"

на д-р Вера Ангелова Ангелова-Димитрова,

доцент по научна специалност 02.21.10 "Приложение на принципите и методите в различни области на науката (техническа)" в ИИКТ-БАН, секция "Интелигентни системи"

Обща характеристика на представените трудове

За участие в конкурса са представени 28 публикации, 3 университетски учебника и 2 университетски учебни пособия. От публикациите, 17 са в списания с импакт фактор [В1 - В10, Г2 - Г5, Г7, Г8, Г14] и 7 са в списания с SJR [Г1, Г6, Г9 - Г13]. Публикациите не повтарят представените за придобиване на образователната и научна степен "доктор" и за заемане на академичната длъжност "доцент".

Представените за конкурса научни публикации се групират тематично в следните групи:

1. Обусловеност и чувствителност на матрични уравнения [В1 - В10, Г1 - Г3, Г5 - Г11, Г13, Г15 - Г18].

2. Софт компютинг [Г4].

3. Персоналност и поведение при електронна търговия [Г12, Г14].

[B1] **Popchev, I., Angelova, V. On the Sensitivity Estimation of the Matrix Equation $X^s \pm A^* X^t A = Q$. Cybernet. Inf. Techn., 10, 2, IICT- BAS, 2010, ISSN:1311-9702, 14-30**

Резюме: Направен е анализ на ефективността на пертурбационните граници, предложени в пет литературни източника за реалните и комплексните уравнения $X^s \pm A^* X^t A = Q$, с s и t – реални числа. Сравнението е направено на базата на няколко числени примера, взети от литературата. Резултатите от експерименталния анализ позволяват да се класифицират разглежданите граници по отношение на близост до оценяваната величина и цялостното им приложение. Наблюдаваното поведение и анализираните свойства на границите, разгледани в статията, важат за всяка задача, която принадлежи към класа на използваните експериментални модели.

Abstract: In this paper the effectiveness of the perturbation bounds proposed in five issues for the real and the complex equations $X^s \pm A^* X^t A = Q$, with s and t – real numbers is analyzed. The comparison is made on the base of several numerical examples, taken from the literature. The results of the experimental analysis allow to classify the bounds considered with respect to closeness to the estimated quantity and comprehensive application. The observed behaviour and the analysed properties of the bounds considered in the paper hold true for every problem, which belongs to the class of the experimental models used.

[B2] **Popchev, I., Angelova, V. On the Sensitivity of the Matrix Equations $X \pm A^* X^{-1} A = Q$. Cybernet. Inf. Techn., 10, 4, IICT - BAS, 2010, ISSN:1311-9702, 36-61**

Резюме: Извършен е сравнителен анализ на ефективността и точността на съществуващите методи за оценка на чувствителността на решението на нелинейните матрични уравнения $X \pm A^* X^{-1} A = Q$. Обект на анализа са пертурбационните граници на решенията на уравнения $X \pm A^* X^{-1} A = Q$, както и методите, свързани с оценката на чувствителността на решението на уравненията $X^s \pm A^* X^{-t} A = Q$ за конкретния случай, когато $s = 1$, $t = 1$. Изследва се поведението и надеждността на границите, предложени в девет източника, чрез експерименти с девет нетривиални числени примера както в реалния, така и в комплексния случаи. Анализира се поведението на изследваните пертурбационни граници. Посочват се области на приложението им, в зависимост от ефективността, трудностите при изчисленията, надеждността и точността.

Abstract: We analyze and compare the effectiveness and the accuracy of the existing methods for estimating the sensitivity of the solution to the nonlinear matrix equations $X \pm A^* X^{-1} A = Q$. Object of the analysis are the perturbation bounds concerning equations $X \pm A^* X^{-1} A = Q$, as well as the methods related to the estimation of the sensitivity of the solution to the equations $X^s \pm A^* X^{-t} A = Q$ for the particular case, when $s = 1, t = 1$. We examine the behavior and the reliability of the bounds, proposed in nine sources, through experiments with nine non-trivial numerical examples in both real and complex cases. Analyzing the behavior of the perturbation bounds considered in the paper, we point out their areas of application in dependence of effectiveness, difficulties for computing, reliability, and accuracy.

[B3] **Konstantinov, M., Petkov, P., Popchev, I., Angelova, V. Perturbation bounds for the matrix equation $X^s \pm A^{\mathrm{H}} X^t A = Q$. C. R. Acad. Bulgare Sci, 63, 9, 2010, ISSN:1310-1331, 1265-1272**

Резюме: Чувствителността на решението на реалното матрично уравнение $X^s \pm A^{\mathrm{H}} X^t A = Q$, когато s е положително цяло число, Q е единичната матрица и t е отрицателно цяло число, както и когато $Q > 0$ и t е положително цяло число, и на комплексното матрично уравнение с s-положително цяло число и t-отрицателно цяло число вече е изследвана в литературата. В тази статия се разглежда чувствителността на нелинейното комплексно матрично уравнение $X^s \pm A^{\mathrm{H}} X^t A = Q$ в общия случай, където степенните показатели s и t са реални числа. Доказва се теорема за съществуването на положително определено решение на уравнението. Чрез използване на техниката на производните на Фреше и прилагане на метода на мажорантите на Ляпунов и принципа на Шаудер за фиксираната точка, са изведени локални и нелокални пертурбационни граници за положително определеното решение X на уравнението.

Abstract: The sensitivity of the solution to the real version of equation $X^s \pm A^{\mathrm{H}} X^t A = Q$, when s is a positive integer, Q is the identity matrix and t is negative integer, as well as when $Q > 0$ and t is a positive integer, or to the complex matrix equation with s-positive integer and t-negative integer is already studied in the literature. In this paper we consider the sensitivity of the non-linear complex matrix equation $X^s \pm A^{\mathrm{H}} X^t A = Q$ in the general case, where the exponents s and t are real numbers. A theorem on the existence of a positive definite solution of the equation is proved. Using the technique of Frechét derivatives and applying the method of Lyapunov majorants and the Schauder fixed point principle, local and non-local perturbation bounds for the positive definite solution X of the equation are obtained.

[B4] **Popchev, I., Konstantinov, M., Petkov, P., Angelova, V. Condition numbers of the nonlinear matrix equation $X + A^{\mathrm{H}} X^{-1} A + B^{\mathrm{H}} X^{-1} B = I$. C. R. Acad. Bulgare Sci, 64, 12, BAS, 2011, ISSN:1310-1331, 1679-1688**

Резюме: Статията е посветена на обусловеността на нелинейното комплексно матрично уравнение $X + A^{\mathrm{H}} X^{-1} A + B^{\mathrm{H}} X^{-1} B = I$ с квадратни матрици на данните A и B (A^{H} означава комплексно спрегнатата транспонирана /или Ермитово спрегнатата/ на матрицата A, I е единичната матрица). Решението на това уравнение е свързано със съществуването на матрична декомпозиция при решаване на система от линейни уравнения чрез разлагане на две линейни системи със съответно горно и долно триъгълни матрични коефициенти. Изведени са подобрени абсолютни и относителни нормови, смесени и покомпонентни числа на обусловеност на уравнението. Числата на обусловеност са лесно изчислими мерки за чувствителност на решението по отношение на смущения в данните и се използват за формулиране на лесно изчислими

локални пертурбационни граници за решението като функция на смущенията в данните. Числата на обусловеност позволяват да се оцени нивото на неопределеност в решението, дължащо се на грешки (от измерване, моделиране, закръгляване) в данните, преди да се приложи числен алгоритъм за решаване на уравнението. Границите са получени с помощта на техниките на производните на Фреше и прилагане на метода на мажорантите на Ляпунов и принципа на фиксираната точка. Резултатите са илюстрирани с числени примери.

Abstract: The paper is devoted to the conditioning of the nonlinear complex matrix equation $X + A^{\mathrm{H}}X^{-1}A + B^{\mathrm{H}}X^{-1}B = I$ with square data matrices A and B (A^{H} denotes the complex conjugate transpose of the matrix A) and I being the identity matrix. The solution of this equation is related to the existence of a certain matrix decomposition when solving a system of linear equations by decomposition into two linear systems with lower and upper triangular block coefficient matrices, respectively. Explicit expressions for the absolute and relative norm-wise, mixed and component-wise condition numbers for the equation are proposed in the paper. The condition numbers are easily computable measures for the sensitivity of the solution relative to perturbations in the data. The condition numbers are used to derive easily computable local bounds for the perturbation in the result as a function of the perturbations in the data. The condition numbers allow to estimate the level of uncertainty in the solution due to errors (measurement, modeling, round-off) in the data before applying a numerical algorithm to solve the equation. The bounds are obtained using the Fréchet derivatives and applying the techniques of Lyapunov majorants and fixed point principles. The results are illustrated by numerical examples.

[B5] **Popchev, I., Angelova, V. Residual bound of the matrix equation $X+A^{\mathrm{H}}X^{-1}A+B^{\mathrm{H}}X^{-1}B = I$. C. R. Acad. Bulg. Sci., 66, 10, 2013, ISSN:1310-1331, 1379-1384**

Резюме: Изведена е нелокална граница на остатъчната грешка в изчисленото приближено Ермитово положително определено решение на уравнението $X+ A^{\mathrm{H}}X^{-1}A + B^{\mathrm{H}}X^{-1}B = I$. Уравнението възниква при решаване на системата от линейни алгебрични уравнения $Px = f$ чрез матрично разлагане. Границата е изведена на базата на нелокалния пертурбационен анализ, чрез прилагане на техниките на мажоритарните Ляпунов и принципите на фиксираната точка. Предложената граница може да се използва като стоп-критерий на итерационни алгоритми при решаване на уравнението. Предимство на границата са нейната простота и практическа полезност за оценка на точността на приближеното решение, получено с помощта на итерационен алгоритъм. Теоретичните резултати са илюстрирани с няколко числени примера.

Abstract: We consider non-local residual bound for the calculated approximation of the Hermitian positive definite solution to equation $X + A^{\mathrm{H}}X^{-1}A + B^{\mathrm{H}}X^{-1}B = I$. Equation occurs when solving the system of linear algebraic equations $Px = f$ by matrix decomposition. In this paper, we present a computable norm-wise non-local residual bound for the positive definite solution to the equation. The bound is obtained on the basis of the non-local perturbation analysis, the techniques of the Lyapunov majorants and the fixed

point principles. The bound proposed can be used as a stopping criterion for iterative algorithms when solving the equation. The advantage of the bound is its simplicity and practical usefulness to assess the accuracy of the approximate solution using an iterative algorithm. The theoretical results are illustrated with some simple numerical examples.

[B6] **Popchev, I.P., Angelova, V.A. Condition numbers and local perturbation bounds for the matrix equation $X^s \pm A^{\mathrm{H}} X^t A = Q$. C. R. Acad. Bulgare Sci, 66, 1, „Prof. Marin Drinov“ Academic Publishing House, 2013, ISSN:1310-1331, 21-28**

Резюме: Чрез прилагане на теорията на нормовия и покомпонентния пертурбационен анализ, са изведени подобрени изрази за нормовите, покомпонентни и смесени числа на обусловеност на комплексното матрично уравнение $X^s \pm A^{\mathrm{H}} X^t A = Q$, където A е несингулярна $n \times n$ комплексна матрица, а Q е Ермитово положително определена матрица. A^{H} означава комплексно спрегната транспонирана /или Ермитово спрегнатата/ на матрицата A, а степенните показатели s и t са реални числа. Покомпонентната пертурбационна граница е оценка на чувствителността на елементите на решението към смущения в елементите на матрицата от данни. Използването й е подходящо, когато елементите на матричните коефициенти варират по специален начин, например когато някои от тях остават постоянни. Предложени са и граници от първи ред за грешките в изчисленото решение. Числата на обусловеност и предложените локални пертурбационни граници позволяват лесно изчислима и бърза оценка на точността на изчисленото решение. Ефективността на предложените граници е демонстрирана с числен пример. Статията е продължение на [B3], където са изведени условия за съществуване на решението и е направен нормов пертурбационен анализ на уравнението. Сравнителен анализ на ефективността и надеждността на повечето известни в литературата пертурбационни граници на това уравнение е даден в [B2].

Abstract: In this paper, we apply the theory of norm-wise and component-wise perturbation analysis to derive explicite expressions for the norm-wise, mixed and component-wise condition numbers to the complex matrix equation $X^s \pm A^{\mathrm{H}} X^t A = Q$, where A is a nonsingular $n \times n$ complex matrix and Q is an Hermitian positive definite matrix. A^{H} stands for the conjugate transpose of A and both s and t are real numbers. The component-wise perturbation bound is an estimate of the sensitivity of the elements of the solution to perturbations in the elements of the data. Its use is convenient when the elements of the data vary in a special way, e.g., when some of them remain constant. First order bounds for the perturbations in the computed solution are proposed, as well. The condition numbers and the local perturbation bounds proposed allow easy computable and fast estimate of the accuracy of the computed solution. The effectiveness of the bounds proposed are demonstrated with a numerical example. The paper is a sequel to [B3], where the existence of solution and norm-wise perturbation analysis of the equation are considered. Comparison analysis to the effectiveness and the reliability of most of the perturabtion bounds to this equation is given in [B2].

[B7] **Popchev, I., Angelova, V. Residual Bound for the Matrix Equation from Interpolation Problems. Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences, 69, 8, Prof. Marin Drinov Academic Publishing House, 2016, ISSN:1310-1331, 957-962**

Резюме: Статията разглежда нелинейното комплексно матрично уравнение $X - \sum_{i=1}^{m} A_i^{\mathrm{H}} X^{-1} A_i = Q$, свързано със задачата за интерполация. С X е означено Ермитово положително определеното решение, A_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ и Q са матрици от данни като Q е Ермитово положително определена матрица. Разглежданото нелинейно матрично уравнение е свързано с решаването на различни практически проблеми. За $m = 1$ уравнението е $X - A^{\mathrm{H}} X^{-1} A = Q$ и е свързано със задачи от анализа на стационарни Гаусови реципрочни процеси в краен интервал. За $m > 1$ уравнението е свързаното с моделирането на оптимални интерполационни задачи и нелинейното матрично уравнение $X = Q + A^{\mathrm{H}}(\hat{X} - C)^{-1}A$, с C - $mn \times mn$ положително определена матрица, A - $nm \times n$ произволна матрица и $\hat{X}$ - $m \times m$ блок диагонална матрица с матрицата $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ по диагонала. Чувствителността и обусловеността на уравнението са широко изследвани в литературата. Сравнителен анализ на различни пертурбационни граници за решението на уравнението е направен в [B2]. В литературата са предложени граници на остатъчната грешка в решението, базирани на собствените стойности на изчисленото с итерационен алгоритъм приближено решение на уравнението. В тази статия е изведена нормова нелокална граница на остатъчната грешка в приближеното решение на нелинейното матрично уравнение, използвайки метода на мажорантите на Ляпунов и прилагайки техниките на принципа на фиксираната точка. За изчисляването на границата не е необходимо познаването на точното решение на уравнението и това я прави подходяща за използване като стоп критерий, когато се прилага итерационен алгоритъм за изчисляване на решението на уравнението. Сравнението на ефективността на предложената граница със съществуващи в литературата граници на остатъчната грешка, въз основа на числен пример от литературата, доказва предимствата на предложената граница, в смисъл на острота и точност.

Abstract: The considered nonlinear matrix equation arises in different practical problems. For $m = 1$ the equation becomes $X - A^{\mathrm{H}} X^{-1} A = Q$ and is related to problems in the analysis of stationary Gaussian reciprocal processes over a finite interval. For $m > 1$ the equation comes from the related to modeling of optimal interpolation problems nonlinear matrix equation $X = Q + A^{\mathrm{H}}(\hat{X} - C)^{-1}A$, with C - $mn \times mn$ positive definite matrix, A - $nm \times n$ arbitrary matrix and $\hat{X}$ is a $m \times m$ block diagonal matrix with the matrix $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ on each diagonal entry. The sensitivity and the conditioning of the equation are widely considered in the literature. A comparison of different perturbation estimates of the accuracy of the solution to the equation is given in [B2]. Residual bounds, based on the eigenvalues of the approximate solution to the equation, obtained by an iterative algorithm, are proposed in the literature. In this paper we derive norm-wise non-local residual bound of an approximate solution to the nonlinear matrix equation using the method of Lyapunov majorants and applying the techniques of fixed point principle. The

bound does not need any knowledge of the exact solution of the equation and is suitable for use as a stop criteria of the iterations, when computing iteratively the solution of the equation. The comparison of the effectiveness of the bound proposed with the residual bound from the literature, based on numerical example from the literature, verify the advantage of the bound proposed in sens of sharpness and the accuracy.

[B8] **Angelova, V., Hached, M., Jbilou, K. Approximate solutions to large nonsymmetric differential Riccati problems with applications to transport theory. Numerical Linear Algebra with Applications, e2272, 27(1), John Wiley & Sons Ltd, 2020, ISSN:1099-1506, DOI:10.1002/nla.2272, 1-17**

Резюме: В статията се разглежда несиметричното диференциално матрично уравнение на Рикати с висока размерност и с дясната част от нисък ранг. Диференциалните несиметрични уравнения на Рикати играят основна роля в много области като теория на транспортните процеси, модели на флуидни потоци, вариационно смятане, оптимално управление и филтрация, H_1-управление, динамично програмиране и диференциални игри. Доколкото ни е известно, няма разработен метод за решаване на уравнението с висока размерност. В тази статия се показва как да се приложи разширеният блок алгоритъм на Арнолди (EBA) за получаването на приблизителни решения от нисък ранг. Разглежда се частният случай, съответстващ на несиметричното диференциално матрично уравнение на Рикати от транспортната теория. Показано е как да се прилагат методи от типа на Крилов като разширеният блок алгоритъм на Арнолди, за да се получат приблизителни решения с нисък ранг. Първоначалната задача се проектира върху пространства с понижена размерност, за да се получат несиметрични диференциални уравнения от нисък ранг, които се решават с помощта на експоненциалното приближение или чрез други интеграционни схеми като формула за обратна диференциация (BDF) или метода на Розенброк. Представен е също така подход, основан на прилагането на схемата BDF към първоначалната задача, което води до решаването на алгебрични уравнения на Рикати, които са решени с Нютонов блок метод на Арнолди. И с трите метода се постига приблизително решение. Направени са числени експерименти, сравняващи тези подходи за задачи с голяма размерност. Също така е показано как тази техника може лесно да се използва за решаване на някои задачи от добре познатото транспортно уравнение. В тази статия, техниките на мажорантите на Ляпунов и принципът на фиксираната точка се използват за получаване на нелокални нелинейни граници на грешката, представляваща разстоянието между приблизителното решение на несиметричното диференциално матрично уравнение на Рикати от понижен ред и точното решение.

Abstract: In the present paper, we consider large scale nonsymmetric differential matrix Riccati equations with low rank right hand sides. The differential nonsymmetric Riccati equations play a fundamental role in many areas such as transport theory, fluid queues models, variational theory, optimal control and filtering, H_1-control, invariant embedding and scattering processes, dynamic programming and differential games. To our knowledge there is no existing method in the large scale case. In this paper, we show how to apply the extended block Arnoldi algorithm (EBA) to get low rank approximate solutions. We treat

the special case corresponding to nonsymmetric differential matrix Riccati equations from transport theory. We show how to apply Krylov-type methods such as the extended block Arnoldi algorithm to get low rank approximate solutions. The initial problem is projected onto small subspaces to get low dimensional nonsymmetric differential equations that are solved using the exponential approximation or via other integration schemes such as Backward Differentiation Formula (BDF) or Rosenbrok method. We also present an approach based on the application of the BDF scheme to the initial problem, leading to the resolution of algebraic Riccati equations which are solved by a Newton-block Arnoldi method. All three methods were able to achieve an approximate solution. We reported some numerical experiments comparing those approaches for large scale problems.We also show how these technique could be easily used to solve some problems from the well known transport equation. In this paper, the techniques of the Lyapunov majorants and fixed point principle are used to obtain a non-local nonlinear bound of the error representing the distance between the approximate solution to the nonsymmetric differential low-rank Riccati equation to the exact solution.

[B9] **Angelova, V., Hached, M., Jbilou, K. Sensitivity of the Solution to Nonsymmetric Differential Matrix Riccati Equation. Mathematics, 9, 8, 2021, ISSN:2227-7390, DOI:https://doi.org/10.3390/math9080855, 855-1-855-18**

Резюме: Несиметричните диференциални уравнения на Рикати са свързани с линейни гранични задачи, възникващи в теория на игрите, теория на управлението, вариационно смятане и теория на транспортните процеси. Те са междинна стъпка в задачите от апроксимация по сингулярни смущения и теория на управлението, когато се прилагат линейни трансформации, за да се намали редът на системите от висок ред до по-нисък ред или до частична декомпозиция на системи. Тази статия се фокусира върху чувствителността на решението към смущения в матричните коефициенти и началното състояние. Два подхода на нелокалния пертурбационен анализ на симетричното диференциално матрично уравнение на Рикати са разширени до несиметричния случай. Прилагайки техниките на производните на Фреше, метода на мажорантите на Ляпунов и принципите на фиксираната точка, са изведени две пертурбационни граници. Първата граница се основава на интегралната форма на решението и се получава за несиметричното диференциално матрично уравнение на Рикати в общата му форма. Втората граница използва твърдението на класическата теория на Радон за еквивалентност на решението на диференциалното матрично уравнението на Рикати с решението на граничната задача на асоциираната диференциална система. Втората граница има предимството да не е свързана с решаването на несиметричното диференциално матрично уравнение на Рикати и следователно с проблемите на дивергенцията на числената процедура. Втората граница е формулирана за приблизителното решение на мащабираното несиметрично диференциално уравнение на Рикати от понижен ред. Двете граници използват съществуващите оценки на чувствителността за матричната експонента и са алтернативни. Числените примери показват, че предложените оценки са доста остри както за уравнението от понижен ред, така и за уравнение на Рикати с висока размерност. Пертурбационната граница е от решаващо значение в процеса на числено решаване на едно уравнение, както и инструмент за оценка на устойчивостта на процеса на изчисление. Тесните пертурбационни граници, предложени в статията, позволяват да се оцени точността на численото решение на несиметричното диференциално матрично уравнение на Рикати.

Abstract: Nonsymmetric differential Riccati equations are related to linear boundary value problems arising in game and control theory, oscillation criterion problems for second order differential systems, variational calculus and theory of transport processes. They are an intermediate step in problems from singular perturbations and control theory when linear transformations are applied in order to reduce high-order systems to lower order or to partially decomposed systems. This work is focusing on the sensitivity of the solution to perturbations in the matrix coefficients and the initial condition. Two approaches of nonlocal perturbation analysis of the symmetric differential Riccati equation are extended to the nonsymmetric case. Applying the techniques of Fréchet derivatives, Lyapunov majorants and fixed point principle, two perturbation bounds are derived. The first bound is based on the integral form of the solution and is derived for the nonsymmetric differential Riccati equation in its general form. The second one exploits the statement of the classical Radon's theory of local equivalence of the solution to the differential matrix Riccati equation to the solution of the initial value problem of the associated differential system. It has the advantage of not being related with the solution of the nonsymmetric differential Riccati equation and hence with problems of divergence of the numerical procedure. The second bound is formulated for the low dimensional approximate solution to the large scale nonsymmetric differential Riccati equation. The two bounds exploit the existing sensitivity estimates for the matrix exponential and are alternative. Numerical examples show that the estimates proposed are fairly sharp for both low dimensional and large-scale Riccati equation. The perturbation bound is a crucial issue of the process of numerical solution of an equation as well as a tool to evaluate the stability of the computation process. The tight perturbation bounds, proposed in the paper, allow to estimate the accuracy of the solution to a numerically solved nonsymmetric differential matrix Riccati equation.

[B10] **Angelova, V., Balabanov, T., Popchev, I. On the sensitivity estimation of the symmetric matrix Riccati differential equation. Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences, 75, 11, Prof. Marin Drinov Academic Publishing House, 2022, ISSN:1310-1331, DOI:10.7546/CRABS.2022.11.11, 1638-1646**

Резюме: Разглеждат се три вече известни пертурбационни оценки на решението на симетричното матрично диференциално уравнение на Рикати $\dot{X}(t) = A'X(t) + X(t)A + B - X(t)CX(t), \quad X(0) = X_0$, във времевия интервал $T = [0, t_1]$, $t_1 > 0$, възникващо при оптималното управление на линейни системи, оптимална филтрация, теория на игрите, H_∞ управление на линейни нестационарни системи и др. Ефективността на разглежданите граници се анализира експериментално. Сравнява се тяхната острота за задачи с влошаване на обусловеността и се посочват областите на приложение на границите. Демонстрираните предимства и недостатъци на трите пертурбационни граници, разгледани в този експериментален анализ, показват, че границите са алтернативни. Аналитичното решение на скаларното диференциално уравнение на Рикати на един от експерименталните модели е доказано в теорема.

Abstract: In this paper, we consider three already known perturbation estimates of the solution to the symmetric matrix Riccati differential equation $\dot{X}(t) = A'X(t) + X(t)A + B - X(t)CX(t), \quad X(0) = X_0$, on the time interval $T = [0, t_1]$, $t_1 > 0$, arising in optimal control linear systems, optimal filtering, game theory, H_∞ control of linear time-varying systems, etc. The effectiveness of the bounds considered is analyzed experimentally, their sharpness for problems with increasing conditioning is compared, and the areas of application of the bounds are specified. The demonstrated advantages and disadvantages of the three perturbation bounds considered in this experimental analysis show, that the bounds are alternatives. The analytical solution to the scalar Riccati differential equation of one of the experimental models is proved in theorem.

[Г1] **Angelova, V., Konstantinov, M., Petkov, P., Popchev, I. Perturbation analysis for the complex matrix equation $X - A^{\mathrm{H}}\sqrt{X^{-1}}A = I$. Proc. 16th IFAC World Congress 2005, 16, 1, Praha, 2005, ISBN:978-3-902661-75-3, DOI:10.3182/20050703-6-CZ-1902.00951, 43-47**

Резюме: Извършен е пълен пертурбационен анализ на комплексното матрично уравнение $X - A^{\mathrm{H}}\sqrt{X^{-1}}A = I$, с матрица на данните **A**, решение **X** и **I** - единичната матрицата. Това уравнение възниква в теорията на управлението при решаване на системи от линейни уравнения чрез LU декомпозиция. Изведени са числа на обусловеност, локални и нелокални пертурбационни граници. Приложената техника се основава на мажоритарните на Ляпунов и принципите на фиксираната точка. Даден е илюстративен числов пример.

Abstract: In this paper a complete perturbation analysis of the complex matrix equation $X - A^{\mathrm{H}}\sqrt{X^{-1}}A = I$, with data matrix **A**, solution **X** and **I** - the identity matrix is presented. This equation arises in control theory when solving systems of linear equations by LU decomposition. Condition numbers, local and non-local perturbation bounds are obtained. The technique used is based on Lyapunov majorants and fixed point principles. An illustrative numerical example is given.

[Г2] **Konstantinov, M., Petkov, P., Popchev, I., Angelova, V. On the sensitivity of the matrix equation $XA-AX = X^2$. Cybernetics and Information Technologies, 8, 2, 2008, ISSN:1311-9702, 3-11**

Резюме: Разглежда се матричното уравнението $XA - AX = X^2$, което възниква при изучаването на афинни структури на разрешима алгебра на Лий и е специален случай на алгебричното уравнение на Рикати. Всяко решение X на уравнението е нилпотентна матрица и ако A няма кратни собствени стойности, тогава $X = 0$ е единственото матрично решение на уравнението. Обратно, ако A има кратни собствени стойности, тогава съществуват нетривиални решения. Наличието на кратни собствени стойности на матрицата с данни A прави стандартната техника за анализ на смущенията, базирана на производните на Фреше, мажоритарните Ляпунов и принципите на фиксираната точка, неприложима към разглеждания проблем. В статия е предложено развитие на стандартната техника на пертурбационния анализ, като тя е разширена за случая на сингулярна операторна матрица, която преобразува разглежданото уравнение в еквивалентно операторно уравнение. Получени са локални граници на нормата на проекции на смущението в подпространства с $n \times n$ положително коизмерение. Проекцията в пертурбационните подпространства преодолява недостатъка на стандартната техника и позволява нейното приложение и в случаи на сингулярна операторна матрица. Изведени са локални и нелокални пертурбационни граници. Илюстративни числени примери демонстрират ефективността на предложените граници.

Abstract: The paper deals with the matrix equation $XA - AX = X^2$, which arises in studying affine structures on solvable Lie algebras and is a special case of the algebraic Riccati equation. Every solution X of the equation is a nilpotent matrix and if A has no multiple eigenvalues then $X = 0$ is the only matrix solution to the equation. Conversely, if A has multiple eigenvalues then there exist nontrivial solutions. The multiple eigenvalues of the data matrix A make the standard technique of perturbation analysis, based on the Fréchet derivatives, Lyapunov majorants and fixed poitn principle, not applicable to the problem considered. For this reason, in this paper the standard technique of perturbation analysis is extended for the case, when the operator matrix, which transform the equation considered in an equivalent operator equation is singular. We obtain local bounds on the norm of certain projections of the perturbation on subspaces of $K\ n \times n$ of positive codimension. The projection of the perturbation subspaces overcomes the shortcoming of the standard technique and allows its application also in the case of a singular operator matrix. Both local and nonlocal perturbation bounds are obtained. Illustrative numerical examples demonstrate the effectiveness of the bounds proposed.

[Г3] **Konstantinov, M., Petkov, P., Popchev, I., Angelova, V. Perturbation bounds for the matrix equation $C + \sum_{i=1}^{r} A_i X B_i + A X^s E = 0$. C. R. Acad. Bulgare Sci., 61, 9, 2008, ISSN:1310-1331, 1111-1120**

Резюме: Направен е пертурбационен анализ на матричното уравнение $C + \sum_{i=1}^{r} A_i X B_i + A X^s E = 0$, с s и r - естествени числа. Изведени са числа на обусловеност, локални и нелокални граници на грешките в решението във функция от смущенията в данните. Локалната граница дава задоволителни резултати за малки смущения в данните, но няма дефиниция колко малки могат да бъдат те. Локалната граница дава оценка на грешката в решението дори, когато поради твърде високи стойности на смущенията в данните, смутеното уравнение няма решение. Нелокалната граница е малко по-песимистична, но дава резултати, за смущения в данните, принадлежащи на предварително определена област на приложимост на границата. Принадлежността на смущенията към предварително определената област на приложимост гарантира наличието на решение на смутеното уравнение.

Abstract: In this paper a perturbation analysis of the matrix equation $C + \sum_{i=1}^{r} A_i X B_i + A X^s E = 0$, s and r - natural numbers, is presented. Condition numbers, local and nonlocal perturbation bounds are derived. The local bound gives satisfactory results for small perturbations in the data. The nonlocal bound is slightly more pessimistic but holds when the perturbation in the data belongs to a preliminary defined domain of applicability of the bound.

[Г4] **Angelova, V. Investigations in the Area of Soft Computing. Cybernetics and Information Technologies, 9, 1, IICT-BAS, 2009, ISSN:1311-9702, 18-24**

Резюме: Статията разглежда проекцията на софт-компютинга в изследванията на учените от Института по информационни технологии на БАН. Очертани са областите на изследвани задачи, както и тенденции за бъдещи изследвания.

Abstract: The article attempts to give a projection of Soft computing in the investigations of the scientists from the Institute of information technologies of the Bulgarian academy of sciences. Areas of studied problems, as well as trends are mentioned.

[Г5] **Konstantinov, M., Petkov, P., Popchev, I., Angelova, V. Sensitivity of the matrix equation $A_0 + \sum_{i=1}^{k} \sigma_i A_i^* X^{p_i} A_i = 0$, $\sigma_i = \pm 1$. Appl. Comput. Math, 10, 3, Azerbaijan National Acad Sci, 2011, ISSN:1683-3511, 409-427**

Резюме: Изследва се чувствителността на решението на обобщеното нелинейно матрично уравнение $A_0 + \sum_{i=1}^{k} \sigma_i A_i^* X^{p_i} A_i = 0$, $\sigma_i = \pm 1$, където k е положително цяло число, а p_i, $i = 1, \ldots k$ са реални числа. Разглеждат се както реалният, така и комплексният случай. Използвайки техниката на производните на Фреше, смутеното уравнение се записва като еквивалентно операторно уравнение, което позволява прилагането на метода на мажорантите на Ляпунов и принципа на фиксираната точка на Шаудер за получаване на нормови числа на обусловеност, както и локални и нелокални пертурбационни граници. Изведени са абсолютни и относителни числа на обусловеност спрямо смущенията в матричните коефициенти и локални пертурбационни граници за $p = \pm r$, $p = \pm 1/s$, $p = \pm r/s$, r, s естествени числа. Предложени са и нелокални пертурбационни граници при $p = \pm 1/2$, $p = 1/3$, $p = 1/s$, и $p = \pm r$. Ефективността на пертурбационните граници е демонстрирана с числени примери.

В две леми са доказва производната на Фреше на функцията $A \to A^p$, с $p = -1/s$, в точката A, както и нормовите граници за членовете от втори и по-висок ред на смущението в матрицата А за $p = -1/2$ и $p = \pm r$, $r \geq 2$. Тези резултати са със самостоятелно значение.

Abstract: In this paper, the sensitivity of the solution to the general type nonlinear matrix equation $A_0 + \sum_{i=1}^{k} \sigma_i A_i^* X^{p_i} A_i = 0$, $\sigma_i = \pm 1$ is studied, where k is a positive integer and p_i, $i = 1, \ldots k$ are real numbers. Both, the real and the complex case are studied. Using the technique of Fréchet derivatives, the perturbed equation is written as an equivalent operator equation, which allows applying the method of Lyapunov majorants and Schauder fixed point principle to obtain normwise condition numbers as well as local and nonlocal perturbation bounds. Absolute and relative condition numbers relative to perturbations in the matrix coefficients and local perturbation bounds for $p = \pm r$, $p = \pm 1/s$, $p = \pm r/s$, r, s natural numbers are derived. Non–local perturbation bounds for $p = \pm 1/2$, $p = 1/3$, $p = 1/s$, and $p = \pm r$ are proposed as well. The local bound gives satisfactory results for small perturbations in the data. The non–local bound is slightly more pessimistic but holds when the perturbation in the data belongs to a preliminary defined domain of applicability of the bound. Several numerical examples are given to illustrate the effectiveness of the perturbation bounds.

In two lemmas, the Fréchet derivative of the function $A \to A^p$, with $p = -1/s$, at the point A, as well as normwise bounds for the terms of second and higher order of the perturbation in the matrix A for $p = -1/2$ and $p = \pm r$, $r \geq 2$, are proved. These results are of independent significance.

[Г6] **Popchev, I., Petkov, P., Konstantinov, M., Angelova, V. Perturbation bounds for the nonlinear matrix equation $X + A^{\mathrm{H}}X^(-1)A + B^{\mathrm{H}}X^(-1)B = I$. LSSC 2011, LNCS 7116, Springer, Heidelberg, 2012, ISSN:0302-9743, DOI:10.1007/978-3-642-29843-1_17, 155-162**

Резюме: Направен е пълен пертурбационен анализ на нелинейното матрично уравнение $X + A^{\mathrm{H}}X^{-1}A + B^{\mathrm{H}}X^{-1}B = I$, където A и B са квадратни комплексни матрици, A^{H} обозначава комплексно спрегната транспонирана /или Ермитово спрегнатата/ на матрицата A и I е единичната матрица. Матричното уравнение е свързано със задачата за решаване на системата от линейни уравнения $Px = F$, чрез трансформиране на системата в две линейни системи със съответно долно- и горно-триъгълен блок матричен коефициент. Съществуването на разлагането на матрицата е свързано с решаването на уравнението, разгледано в статията. Доколкото ни е известно, това е първото изследване на чувствителността на уравнението. Получени са локални пертурбационни граници с помощта на производните на Фреше. За да се изведе нелокална пертурбационна граница, смутеното уравнение се записва в еквивалентна форма като матрично уравнение за смущението в решението и се прилага техниката на мажорантите на Ляпунов и принципа на фиксираната точка на Шаудер. Локалните граници се извеждат, като се пренебрегнат членовете от втори и по-висок ред и са валидни само асимптотично. Тъй като $A \to A^{\mathrm{H}}$ не е хомогенна, при извеждане на числата на обусловеност и локалните граници се прилага техниката, основана на теорията на адитивните оператори. Нелокалната граница е валидна при смущения в данните, принадлежащи на област от допустими смущения. Включването на смущенията в областта за допустимост гарантира, че смутеното уравнение има единствено решение в околността на точното /несмутеното/ решение. Нелокалната граница е строга, но може да не съществува или може да бъде песимистична в някои случаи. Пертурбационните граници позволяват да се формулират оценки на обусловеността и точността на изчисленото решение, при използване на устойчив числен алгоритъм за решаване на уравнението. Числените експерименти показват, че за разглеждания клас числени задачи, предложените пертурбационни граници дават задоволително точни оценки на грешката в решението на уравнението.

Abstract: In this paper we make a complete perturbation analysis of the nonlinear matrix equation $X + A^{\mathrm{H}}X^{-1}A + B^{\mathrm{H}}X^{-1}B = I$, where A and B are square complex matrices, A^{H} denotes the complex conjugate transpose of the matrix A and I is the identity matrix. The matrix equation is related to the problem of solving the system of linear equations $Px = f$, when it is transformed to two linear systems with lower and upper triangular block coefficient matrix, respectively. The existence of the matrix decomposition is related to the solution of the equation, considered in the paper. We make a complete perturbation analysis of the equation, which, to the best of our knowledge, is the first study on the sensitivity of the equation. Local perturbation bounds are derived using the Fréchet derivatives. To derive the non-local perturbation bound, the perturbation analysis problem is written in equivalent form as a matrix equation for the perturbation in the solution, and the technique of Lyapunov majorants and the fixed

point principle of Schauder are used. The local bounds are obtained neglecting second and higher order terms and are only asymptotically valid. For the calculation of the condition numbers and the local bounds, the technique, based on the theory of additive operators, must be applied because the function $A \rightarrow A^{\mathrm{H}}$ is not homogeneous. The non-local bound gives a domain of admissible perturbations and a non-linear function, which estimates the perturbations in the solution to the equation. The inclusion of the perturbations to the domain of admissibility guaranties that the perturbed equation has a unique solution in a neighbourhood of the unperturbed solution. The non-local bound is rigorous, but may not exist or may be pessimistic in some cases. The perturbation bounds allow to derive condition and accuracy estimates for the computed solution, when using a stable numerical algorithm to solve the equation. Numerical experiments show that for the considered class of numerical problems, the perturbation bounds, proposed, give satisfactory accurate estimates of the perturbation in the solution to the equation.

[Г7] **Popchev, I., Angelova, V. Residual bound of the matrix equations $X \pm A_2^{\mathrm{H}} X^{-1} A_2 = A_1$. C. R. Acad. Bulg. Sci., 67, 9, 2014, ISSN:1310-1331, 1217-1222**

Резюме: Разглеждат се нелинейните комплексни матрични уравнения $X \pm A_2^{\mathrm{H}} X^{-1} A_2 = A_1$, където A_1 е Ермитово положително определена $n \times n$ комплексна матрица, а A_2^{H} обозначава комплексно спрегната транспонирана /Ермитово спрегнатата/ на A_2. Уравненията намират широко приложение в различни области като теория на управлението, динамично програмиране, статистика, стохастична филтрация. Като е направено предположението, че са изпълнени необходимите и достатъчни условия за съществуването на Ермитово положително определени решения на уравненията, е изведена семпла, ефективна и лесно изчислима нормова нелокална граница на остатъчната грешка в изчислените чрез итерационен алгоритъм приблизителни решения на уравненията. Границата е с практическо значение за оценка на точността на приближеното решение, получено чрез итерационен алгоритъм. Ефективността на предложената граница е илюстрирана с числен пример. Сравнението с известна в литературата граница на остатъчната грешка за уравнение $X + A_2^{\mathrm{H}} X^{-1} A_2 = A_1$ показва превъзходство на предложената в статията граница по отношение на точност и острота.

Abstract: The nonlinear complex matrix equations $X \pm A_2^{\mathrm{H}} X^{-1} A_2 = A_1$ are considered, where A_1 is a Hermitian positive definite $n \times n$ complex matrix and A_2^{H} denotes the conjugate transpose of A_2. These have wide applications in various areas as control theory, dynamic programming, statistics, ladder network, stochastic filtering. Assuming that the necessary and sufficient conditions for the existence of Hermitian positive definite solutions of the equations are fulfilled, we derive a simple, effective and easy computable norm-wise non-local residual bound for the computed by an iterative algorithm approximate solutions to the equation. The bound is simple and of a practical use to assess the accuracy of the approximate solution obtained by an iterative algorithm. The effectiveness of the bound proposed is illustrated by a numerical example. A comparison with a known in the literature residual bound shows the superiority of the proposed in the paper bound for equation $X + A_2^{\mathrm{H}} X^{-1} A_2 = A_1$ in terms of accuracy and sharpness.

[Г8] **Popchev, I., Konstantinov, M., Petkov, P., Angelova, V. Norm-wise, mixes and component-wise condition numbers of matrix equation** $A_0 + \sum_{i=1}^{k} \sigma_i A_i^* X^{p_i} A_i = 0, \sigma_i = \pm 1$**. Journal of Applied and Computational Mathematics, 13, 1, Azerbaijan National Acad Sci, 2014, ISSN:1683-3511, 18-30**

Резюме: Изведени са нормови, смесени и покомпонентни числа на обусловеност на нелинейното матрично уравнение $A_0 + \sum_{i=1}^{k} \sigma_i A_i X^{p_i} A_i = 0$, $\sigma_i = \pm 1$, където решението X и коефициентите A_i, $i = 0, \ldots, k$ са реални или комплексни $n \times n$ матрици и $k \geq 2$ е положително цяло число. В допълнение, A_0 и X са симетрични неотрицателно определени матрици в реалния случай и Ермитово неотрицателно определени матрици в комплексния случай. Степенните показатели p_i, $i = 1, \ldots, k$ са реални числа. Статията е продължение на [Г5], където е доказано съществуването на решение на уравнението, както и са изведени локални и нелокални пертурбационни граници. Формулирани са абсолютни и относителни нормови, смесени и покомпонентни числа на обусловеност за уравнението. Дадени са изчислими изрази за случаите $p_i = \pm r$, $p_i = \pm 1/s$, и $p_i = \pm r/s$, за r, s положителни цели числа. Предложени са горни граници на смесените и покомпонентните числа на обусловеност за реалното уравнение. Числата на обусловеност са мярка за чувствителността на решението към смущения в данните и участват във формулирането на пертурбационни граници за изчисленото решение. От своя страна, пертурбационните граници са елемент от високопроизводителните изчисления. За задачи, при които данните варират значително по големина, често е по-добре да се използват относителни числа на обусловеност. Когато смущенията се различават значително в компонентите, е полезно да се приложи покомпонентният анализ, тъй като нормовите граници, които дават мярка, съответстваща само за най-големите смущения, биха били песимистични за структурирани и по-малки смущения. Смесените числа на обусловеност дават по-точни оценки за задачи с разредени матрици на данните /имат някои нулеви компоненти/, тъй като обикновено не се натрупват грешки от закръгляване в нулевите елементи на данните. Числени примери показват, че оценките са доста остри.

Abstract: This paper set out to determine norm-wise, mixed and component-wise condition numbers of the nonlinear matrix equation $A_0 + \sum_{i=1}^{k} \sigma_i A_i X^{p_i} A_i = 0$, $\sigma_i = \pm 1$, where the solution X and the coefficients A_i, $i = 0, \ldots, k$ are real or complex $n \times n$ matrices and $k \geq 2$ is a positive integer. In addition, A_0 and X are symmetric non-negative definite matrices in the real case and Hermitian non-negative definite matrices in the complex case. The exponents p_i, $i = 1, \ldots, k$ are real numbers. The paper is a sequel to [Г5], where the existence of solution to the equation was studied, as well as local and non-local perturbation bounds are derived. In this paper we obtain absolute and relative norm-wise, mixed and component-wise condition numbers for the equation. Explicit expressions for the cases $p_i = \pm r$, $p_i = \pm 1/s$, and $p_i = \pm r/s$, for r, s positive integers are given. Upper bounds of the mixed and the component-wise condition numbers for the real equation are proposed. The condition numbers are measures for the sensitivity of the solution to perturbations in the data and are involved in the formulation of perturbation bounds for the computed solution. In turn, the perturbation estimates are elements of the high-performance computations. For problems which data differ widely in their magnitude, it is often better to use the relative condition numbers. When the perturbations differ significantly in the components it is useful to apply the component-wise analysis, since the norm-wise bounds giving relevant measure only for the largest perturbations, would be pessimistic for structured and smaller perturbations. The mixed condition numbers give sharper estimates for problems with data, having some zero components, because usually no rounding errors are introduced in the zero data elements. Numerical examples show that the estimates are fairly sharp.

[Г9] **Angelova, V. Local Perturbation Analysis of the Stochastic Matrix Riccati Equation with Applications in Finance. Advanced Computing in Industrial Mathematics. Studies in Computational Intelligence, 728, Springer International Publishing, 2018, ISBN:978-3-319-65529-1, ISSN:1860-949X, DOI:10.1007/978-3-319-65530-7_1, 1-9**

Резюме: Стохастичната линейно квадратична оптимизация /SLQ/ като подход за управление се е доказала, че дава ефективни и подходящи решения на инвестиционните проблеми във финансите. Матричното уравнение на Рикати, свързано със стохастичната линейно квадратичната оптимизация SLQ, е стохастичното матрично уравнение на Рикати /SMRE/. Доколкото ни е известно, чувствителността на SMRE все още не е анализирана. В статията е направен локален пертурбационен анализ на стохастичното матрично уравнение на Рикати /SMRE/ с приложения в линейната квадратична оптимизация на стохастичните финансови модели. След записвана на SMRE в еквивалентна форма на афинен линеен оператор и прилагане на техниките на производните на Фреше, са изведени абсолютни и относителни нормови числа на обусловеност и е формулирана локална (първи ред) граница за грешката в изчисленото решение на уравнението. Числата на обусловеност и пертурбационната граница позволяват да се оцени обусловеността на SMRE и точността на неговото изчислено чрез числено устойчив алгоритъм решение.

Abstract: The stochastic linear quadratic /SLQ/ control approach proves to give effective and appropriate solutions to investment problems in finance. The matrix Riccati equation subject to the SLQ problem, is the stochastic matrix Riccati equation /SMRE/. From the best of our knowledge the sensitivity of the SMRE is still not analyzed. In this paper a local perturbation analysis of the stochastic matrix Riccati equation /SMRE/ with applications in linear quadratic optimization of stochastic finance models is made. Rewriting the SMRE in equivalent form of affine linear operators and applying the techniques of Fréchet derivatives, absolute and relative norm-wise condition numbers are derived and local (first order) perturbation bounds for the error in the computed solution are formulated. The condition numbers and the perturbation bounds allow to estimate the conditioning of the SMRE and the accuracy of its computed by a numerical stable algorithm solution.

[Г10] **Angelova, V. Perturbation analysis of a nonlinear matrix equation arising in tree-like stochastic processes. Studies in Computational Intelligence, 793, Springer Nature Switzerland AG, 2019, ISSN:1860-949X, E-ISSN:1860-9503, DOI:10.1007/978-3-319-97277-0_4, 37-50**

Резюме: Решението, изчислено в средата на машинната аритметика с крайна точност, трябва да бъде придружено от анализ на обусловеността на решаваната задача. В резултат на пертурбационния анализ се извеждат мерки за чувствителността на решението към смущения в матричните коефициенти. По тази причина, за да се установи точността на изчисленото с итерационен алгоритъм решение на нелинейното матрично уравнение, възникващо в дървовидни стохастични процеси $X = \Phi(S), \quad \Phi(S) = C - \sum_{i=1}^{m} A_i X^{-1} D_i$, с $S = (A_1, A_2, \ldots, A_m, D_1, D_2, \ldots, D_m, C) \in \Psi = \underbrace{\mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n\times n}}_{2m+1}$ — $(2m+1)$-група на колекцията от матрични коефициенти A_i, D_i, $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ за $i = 1, \ldots, m$ и $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — несингулярно решение, в статията са формулирани нормови, смесени и покомпонентни числа на обусловеност, както и локални пертурбационни граници. С помощта на методите на нелинейния пертурбационен анализ (мажоранти на Ляпунов, принципи на фиксираната точка) са получени и нормови нелокални граници на остатъчната грешка в решението. Границите на остатъчната грешка са формулирани по отношение на изчисленото приблизително решение на уравнението и могат да се използват като стоп критерии на итерациите, при решаване на разглежданото нелинейно матрично уравнение чрез числено устойчив итерационен алгоритъм.

Abstract: The solution, obtained in the environment of finite precision machine arithmetic must be allays accompanied by an analysis of the conditioning of the problem solved. The perturbation analysis derives measures for the sensitivity of the solution to perturbations in the matrix coefficients. Motivated by these, in order to ascertain the accuracy of an iteratively calculated solution to a nonlinear matrix equation arising in Tree-like stochastic processe $X = \Phi(S), \quad \Phi(S) = C - \sum_{i=1}^{m} A_i X^{-1} D_i$, with $S = (A_1, A_2, \ldots, A_m, D_1, D_2, \ldots, D_m, C) \in \Psi = \underbrace{\mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n\times n}}_{2m+1}$ — the $(2m+1)$-tuple of the collection of matrix coefficients A_i, D_i, $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ for $i = 1, \ldots, m$ and $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — a nonsingular solution, in this paper norm-wise, mixed and component-wise condition numbers, as well as local perturbation bounds are formulated and norm-wise non-local residual bounds are derived using the methods of nonlinear perturbation analysis (Fréchet derivatives, Lyapunov majorants, fixed-point principles). The residual bounds are formulated in terms of the computed approximate solution to the equation and can be used as a stop criteria of the iterations, when solving the considered nonlinear matrix equation by a numerically stable iterative algorithm.

[Г11] **Angelova, V. Non-local perturbation analysis for equation arising in Tree-Like stochastic processes. Advanced Computing in Industrial Mathematics, Studies in Computational Intelligence, 961, Springer, Cham, 2021, ISBN:978-3-030-71615-8, DOI:10.1007/978-3-030-71616-5_3, 16-25**

Резюме: За нелинейно матрично уравнение, възникващо при дървовидни стохастични процеси в [Г10] са формулирани нормови, смесени и покомпонентни числа на обусловеност, както и локални пертурбационни граници и са изведени нормови нелокални граници на остатъчната грешка. Локалните граници са валидни само асимптотично. Ограничението еквивалентното смущение в данните да бъде достатъчно малко, за да се осигури приложимост в достатъчна точност на локалната граница, е недостатък на локалната граница, който се преодолява с нелокалната пертурбационна граница. Като продължение на предишните резултати, в тази статия е формулирана нелокална пертурбационна граница за решението на нелинейното матрично уравнение, възникващо в дървовидните стохастични процеси. Границата е формулирана с помощта на методите на мажорантите на Ляпунов и принципите на фиксираната точка. Нелокалната граница е по-песимистична от локалната граница, тъй като тя включва в себе си освен локалната граница и мярка за елементите от втори и по-висок ред. Но е валидна за смущения в данните, принадлежащи към априори зададена област, което гарантира съществуването на решение на смутеното уравнение в околност на точното решение.

Abstract: For a nonlinear matrix equation arising in Tree-like stochastic processes in [Г10] norm-wise, mixes and component-wise condition numbers, as well as local perturbation bounds are formulated and norm-wise non-local residual bounds are derived. The local bounds are valid only asymptotically. The exigence to be small enough for the perturbations in the data in order to ensure sufficient accuracy of the local bound is an disadvantage of the local bound which is overcome in the non-local perturbation bound. As a continuation of the previous results, in this paper a non-local perturbation bound for the solution to the nonlinear matrix equation arising in Tree-like stochastic processes is formulated using the techniques of Fréchet derivatives and the methods of Lyapunov majorants and fixed-point principles. The non-local bound is more pessimistic than the local bound, but it is formulated for data perturbations included in a given a priori prescribed domain which guarantees the existence of the solution to the perturbed equation in a neighborhood of the exact solution.

[Г12] **Popchev, I., Ketipov, R., Angelova, V. Risk Averseness and Emotional Stability in e-Commerce. Cybernetics and Information Technologies, 21, 3, Prof. Marin Drinov Academic Publishing House, 2021, ISSN:1314 4081, DOI:10.2478/cait-2020-0030, 73-84**

Резюме: Изследва се връзката между емоционалната стабилност, една от основните детерминанти на личността, и нежеланието на потребителите да рискуват, от една страна, и поведението на потребителите в областта на електронната търговия, от друга страна. Предложен е кратък преглед на днешния основен еталон за измерване на човешката личност – Моделът на Големите пет. Проведено е тестово проучване за целите на изследването, базирано на TIPI тест с 226 участници. Тестът TIPI е валидирана и съкратена версия на петфакторния модел. Резултатът от проведеното проучване потвърждава наличието на значими връзки между личностно-детерминантната емоционална стабилност и информираността за потребителския риск, от една страна, и някои от наблюдаваните основни функционалности на онлайн магазините, от друга. Реализирани са два регресионни модела от областта на машинното обучение (Линейна регресия /Linesr Regression/ и Случайна гора /Random Forest/), за да се направи надеждна прогноза за предпочитанията на потребителя в процеса на онлайн пазаруване. Направените изводи обобщават получените резултати и анализа.

Abstract: The study aims to examine the issue of the relationship between Emotional stability, one of the fundamental personality determinants, and users' Risk Averseness, on the one hand, and user behavior in the field of e-commerce, on the other hand. In the beginning, a brief overview of today's primary benchmark for the measurement of human personality – the Big Five Model is proposed. For the aim of the research, based on the TIPI test study with 226 participants is conducted. The TIPI test is a validated and abridged version of the Five-Factor model. The result of the conducted survey confirms the existence of significant relationships between personality determinant Emotional stability and consumer Risk awareness, on one side, and some of the observed main functionalities of the online stores, on the other side. Two regression models of the field of Machine Learning (Linear Regression and Random Forest) are implemented to make a reliable forecast about the user's preferences in the process of online shopping. The made conclusions rely on the obtained results and analysis.

[Г13] **Angelova, V. Sensitivity of the nonlinear matrix equation $X^p = A + M(B + X^{-1})^{-1}M^*$. Advanced Computing in Industrial Mathematics, . BGSIAM 2020. Studies in Computational Intelligence, 1076, Springer, Cham, 2023, ISSN:1860-949X, DOI:10.1007/978-3-031-20951-2_1, 1-11**

Резюме: Статията разглежда чувствителността на нелинейното матрично уравнение $F(X, Q) := X^p - A - M(B + X^{-1})^{-1}M^* = 0$, за положително цяло число $p \geq 1$. За случая $p = 1$, уравнението е добре познатото в теория на управлението, стохастичната филтрация, динамичното програмиране симетрично дискретно алгебрично матрично уравнение на Рикати $X = MX(I+BX)^{-1}M^*+A$ и когато $B = 0$, става дискретно алгебрично матрично уравнение на Ляпунов /или уравнението на Ермитиан Щайн/ $X = M^*XM+A$, с $A = A^*$, възникващи при обработката на сигнали и теория на управлението на системи. Прилагайки локалния и нелокалния пертурбационен анализ, базирани на техниките на производните на Фреше, метода на мажорантите на Ляпунов и принципа на фиксираната точка на Шаудер, са изведени локални и нелокални пертурбационни граници. Локалните граници са граници на грешките от първи ред в решението X, формулирани на базата на абсолютни и относителни числа на обусловеност на уравнението и валидни само асимптотично за достатъчно малки смущения в данните. Формулираната нелокална пертурбационна граница включва локалната граница, както и членове от втори ред на смущенията в данните,

принадлежащи към дадена априорно определена област, което гарантира съществуването на единствено решение на смутеното уравнение в околността на несмутеното точното решение. Числените примери илюстрират ефективността на предложените пертурбационни граници.

Abstract: The paper deals with the sensitivity of the nonlinear matrix equation $F(X, Q) := X^p - A - M(B + X^{-1})^{-1}M^* = 0$, for a positive integer $p \geq 1$. For the case $p = 1$, the equation is the well known in control theory, stochastic filtering, dynamic programming and ladder network symmetric discrete-time algebraic Riccati equation $X = MX(I + BX)^{-1}M^* + A$ and when $B = 0$, it becomes the discrete-time algebraic Lyapunov equation /or Hermitian Stein equation/ $X = M^*XM + A$, with $A = A^*$, arising in signal processing, system and control theory. Applying the local and the nonlocal perturbation analysis, based on the techniques of Fréchet derivatives, the method of Lyapunov majorants and Schauder fixed point principle, local and nonlocal perturbation bounds are derived. The local bounds are first order perturbation bounds for the error in the solution X, formulated on the base of absolute and relative condition numbers of the equation and valid only asymptotically for sufficiently small perturbations in the data. The formulated nonlocal perturbation bound involves the local bound, as well as terms of second order of the perturbations in the data included in a given a priori prescribed domain that guarantees the existence of a unique solution to the perturbed equation in a neighborhood of the unperturbed solution. Numerical examples illustrate the effectiveness of the perturbation bounds proposed.

[Г14] **Ketipov, R., Angelova, V., Doukovska, L., Schnalle, R. Predicting User Behavior in E-Commerce Using Machine Learning. Cybernetics and Information Technologies, 23, 3, Institute of Information and Communication Technologies, Bulgarian Academy of Sciences, 2023, ISSN:1311-9702, DOI:10.2478/cait-2023-0026, 89-101**

Резюме: Уникалните черти на всеки човек съдържат ценни прозрения за неговото потребителско поведение, което позволява на учените и експертите от индустрията да разработят иновативни маркетингови стратегии, персонализирани решения и подобрен потребителски опит. Това изследване представя концептуална рамка, която изследва връзката между основните измерения на личността и стиловете на онлайн пазаруване на потребителите. Чрез използването на теста TIPI, надеждна и валидирана алтернатива на петфакторния модел, се установяват индивидуални потребителски профили. Резултатите разкриват значителна връзка между ключови личностни черти и специфични функционалности за онлайн пазаруване. За да се прогнозират точно нуждите, очакванията и предпочитанията на клиентите в Интернет, в статията се предлага внедряването на два модела за машинно обучение, а именно Дърво на решенията /Decision Trees/ и Случайна гора /Random Forest/. Според приложените показатели за оценка и двата модела демонстрират добри прогнози за поведението на потребителите въз основа на тяхната личност.

Abstract: Each person's unique traits hold valuable insights into their consumer behavior,

allowing scholars and industry experts to develop innovative marketing strategies, personalized solutions, and enhanced user experiences. This study presents a conceptual framework that explores the connection between fundamental personality dimensions and users' online shopping styles. By employing the TIPI test, a reliable and validated alternative to the Five-Factor model, individual consumer profiles are established. The results reveal a significant relationship between key personality traits and specific online shopping functionalities. To accurately forecast customers' needs, expectations, and preferences on the Internet, we propose the implementation of two Machine Learning models, namely Decision Trees and Random Forest. According to the applied evaluation metrics, both models demonstrate fine predictions of consumer behavior based on their personality.

[Г15] **Konstantinov, M., Petkov, P., Pelova, G., Angelova, V. Perturbation analysis of differential and difference matrix quadratic equations: A survey. Proc. of the Bulgarian-Turkish-Ukrainian Scientific Conf. Mathematical analysis, differential equations and their applications, Sunny Beach, Sept. 15-20, 2010, Editors A. Andreev, L. Karandzulov, Academic Publishing House "Prof. Marin Drinov"„ 2011, ISBN:978-954-322454-8, 101-110**

Резюме: Матричните квадратични уравнения (диференциални, диференчни и алгебрични) имат много приложения в областта на науката и техниката, особено в оптималното управление, робастното управление и филтрацията. В същото време чувствителността на техните решения по отношение на смущенията в съответните матрични коефициенти не са проучени в достатъчна степен, въпреки че са положени големи усилия в тази посока. Диференциалните и непрекъснатите алгебрични матрични квадратични уравнения възникват естествено при моделиране на непрекъснати динамични системи. Техните дискретни съответствия, когато се анализират динамични системи с дискретно време. Диференчните уравнения възникват и при прилагането на числени методи за решаване на диференциални матрични уравнения. В статията е представено кратко проучване на резултатите, получени в областта на анализа на смущения на такива уравнения. В редки случаи е възможно да се докаже, че една пертурбационна граница винаги е по-добра от друга пертурбационна граница, въпреки че такива резултати са известни. Сравненията обикновено се правят на конкретни примери за матрични уравнения с известни (референтни) решения. Като правило пертурбационните граници, получени от различни автори и изведени чрез прилагането на различните техники са алтернативни, т.е. никоя граница не е винаги по-добра от други известни граници.

Abstract: Matrix quadratic equations (differential, difference and algebraic) have many applications in science and engineering, especially in optimal control, robust control and filtering. At the same time the sensitivity of their solutions relative to perturbations in the corresponding matrix coefficients has not been studied to a sufficient extent although a great effort has been made in this direction. Differential and continuous–time algebraic matrix quadratic equations arise naturally when modeling continuous–time dynamical systems. Their discrete counterparts when discrete-time dynamical systems are analyzed. Difference equations arise also in the implementation of numerical methods for solving

differential matrix equations. In this paper we present a brief survey on results obtained in the area of perturbation analysis of such equations. In rare cases it is possible to prove that one perturbation bound is always better than another perturbation bound, although such results are known. Comparisons are usually made on particular examples of matrix equations with known (reference) solutions. As a rule the perturbation bounds obtained by different authors and by different techniques are alternative, i.e. no bound is always superior to the other known bounds.

[Г16] **Popchev, I., Angelova, V. Improved residual bound of the matrix equation $X+A_2^H X^{-1}A_2 = A_1$. Proc. of the Int. workshop on Advanced control an optimization: Step ahead '2014 /ACOSA'2014/, Bankya, Bulgaria, 8-10 May 2014, 2014, ISSN:1314-4634, DOI:10.13140/2.1.3682.8965, 1-3**

Резюме: Разглежда се нелинейното комплексно матрично уравнение $X+A_2^{\mathrm{H}}X^{-1}A_2 = A_1$, където A_1 е Ермитово положително определена $n \times n$ комплексна матрица, A_2 е комплексна матрица от ред n и A_2^{H} е нейната комплексно спрегната транспонирана /Ермитово спрегнатата/ и X е Ермитово положително определено решение. Това уравнение намира широко приложение в различни области като теория на управлението, динамично програмиране, статистика, стохастична филтрация. Това определя интереса на много автори към уравнението. В тази статия е изведена елегантна, ефективна и лесно изчислима нормова нелокална граница на остатъчната грешка в изчисленото чрез итерационен алгоритъм приблизително решение на уравнението. Границата на остатъчната грешка може да се използва за оценка на точността на приближеното решение в итерационна процедура.

Abstract: We consider the nonlinear complex matrix equation $X + A_2^{\mathrm{H}}X^{-1}A_2 = A_1$, where A_1 is a Hermitian positive definite $n \times n$ complex matrix, A_2 is a complex matrix of order n and A_2^{H} is its complex conjugate transpose and X is the Hermitian positive definite solution. This equation finds wide applications in various areas as control theory, dynamic programming, statistics, ladder network, stochastic filtering. This determines the interest of many authors to the equation. In this paper we derive a simple, effective and easy computable norm-wise non-local residual bound for the computed by an iterative algorithm approximate solution to the equation. The residual bound can be used to assess the accuracy of the approximate solution in an iterative procedure.

[Г17] **Popchev, I., Angelova, V. Residual bound of the matrix equations $X = A_1 + \sigma A_2^H X^{-2})A_2, \sigma = \pm 1$. Proc. of the Int. Conf. on Big Data, Knowledge and Control Systems Engineering /BdKCSE'2014/, Sofia, Bulgaria, 5 November 2014, p. 19 – 22, Edt. R. Andreev, John Atanasoff Society of Automatics and Informatics, 2014, ISSN:2367-6450, DOI:10.13140/2.1.5026.3849, 19-22**

Резюме: Изведена е пертурационна граница на остатъчната грешка в решенията на нелинейните комплексни матрични уравнения $X = A_1+\sigma A_2^{\mathrm{H}}X^{-2}A_2$, $\sigma = \pm 1$ по метода на мажорантите на Ляпунов и принципите на фиксираната точка. Ефективността на границите е илюстрирана с цифров пример от ред 5.

Abstract: Residual bound for the non-linear complex matrix equations $X = A_1 + \sigma A_2^{\mathrm{H}} X^{-2} A_2$, $\sigma = \pm 1$ is derived using the method of the Lyapunov majorants and the technique of the fixed point principles. The effectiveness of the bound is illustrated by a numerical example of order 5.

[Г18] **Popchev, I., Angelova, V. Residual bounds of the nonlinear matrix equation $X + A^* F(X) A = Q$. International Journal of Data Science, 1, 4, Inderscience publichers, 2016, ISSN:2053-0811, DOI:10.1504/IJDS.2016.081370, 340-352**

Резюме: Статията е преработена и разширена версия на [Г17]. Разглежда се нелинейното матрично уравнение $X + A^* \mathcal{F}(X) A = Q$. Формулирани са нормови нелокални граници на остатъчната грешка в решението, получено чрез итерационен алгоритъм. Границите на остатъчната грешка са изведени по метода на мажорантите на Ляпунов и техниките на принципа на фиксираната точка. Разгледани са подробно два конкретни случая на уравнението и са получени изчислими изрази на нормовите нелокални граници на остатъчната грешка. Разгледани са числени примери за двата, разгледани в статията различни случая на нелинейна матрична функция $F(X)$, за да се демонстрира ефективността на предложените граници.

Abstract: This paper is a revised and expanded version of [Г17]. The nonlinear matrix equation $X + A^* \mathcal{F}(X) A = Q$ is considered. Norm-wise non-local residual bounds for the accuracy of the solution obtained by an iterative algorithm are formulated. The residual bounds are derived using the method of Lyapunov majorants and the techniques of the fixed point principle. Two particular cases of the equation are considered in details and explicit expressions of the norm-wise non-local residual bounds are obtained as well. Numerical examples for the two, considered in the paper different cases of the nonlinear matrix function $F(X)$ are provided to demonstrate the efficiency of the bounds proposed.