

РЕЦЕНЗИЯ

от проф. д-мн Светозар Димитров Маргенов

Институт по информационни и комуникационни технологии – БАН

на дисертационния труд на

доц. д-р Милена Радославова Рачева

на тема

Нови подходи в крайноелементния анализ за елиптични задачи

(преработен вариант)

за присъждане на научната степен “Доктор на науките”

1. Актуалност

Отправна точка в дисертацията е безспорният факт, че компютърното моделиране има важно значение за съвременното развитие на технологиите и икономиката. Ролята на компютърното моделиране, като трети клон в съвременната наука, заедно с класическите теоретични и експериментални изследвания се възприема все по-масово от научната общност. Математическите модели на редица важни процеси и явления се описват с помощта на диференциални, интегрални и интегро-диференциални уравнения. Численото решаване на такива уравнения се базира на подходяща дискретизация и ефективни методи и алгоритми за тяхната реализация. Актуалността на изследванията в областта на метода на крайните елементи е безспорна. В съвременната изчислителна математика той се е утвърдил, като технология за решаване на все по-сложни задачи на компютърното моделиране.

Дисертацията на доц. Милена Рачева е в областта на изчислителната математика. Тя включва анализ на нестандартни варианти на метода на крайните елементи (МКЕ) за числено решаване на елиптични гранични задачи от втори и четвърти ред, както и свързани с тях спектрални задачи за пресмятане на собствени числа и собствени вектори.

2. Цели и задачи

Целите и задачите на дисертационния труд включват:

- Доказване на нови резултати за крайни елементи с интегрални степени на свобода.
- Па-нататъшно развитие на идеите и получаване на нови резултати в теорията на суперсходящия апостериорен анализ.

- Обогаляване на резултатите при изследване на смесени вариационни задачи от четвърти ред.
- Приложения на получените теоретични резултати за извеждане на вариационна постановка на математически модели и числено решаване на моделни инженерни задачи.

Представените в дисертацията изследвания са добре мотивирани и са насочени към актуални и амбициозни задачи. Тяхното решаване изисква задълбочени познания в областта на теоретичните основи на метода на крайните елементи, в това число теория на частни диференциални уравнения, диференциални оператори и функционален анализ. Доказателството на редица основни резултати е свързано с преодоляване на сериозни трудности и математическа изобретателност.

3. Структура и съдържание

Това е втори преработен вариант на дисертационния труд. Той е в обем от 232 страници и се състои от увод, четири глави и библиография. Резултатите са онагледени с 36 фигури и 16 таблици. Общият обем на новия вариант е съществено намален в сравнение с първоначалните 300 страници. Това се дължи, както на някои съкращения в текста, така и на променения размер на страницата при отпечатване в издателството на БАН. Най-съществени промени има в Глава 3.

Библиографията включва 152 заглавия, които обхващат работи в периода от 1961 г. до 2013 г. Те показват много добра информираност за основни резултати в областта на представения дисертационен труд, както и тяхното компетентно ползване.

Увод

Уводът е в обем от 10 страници и включва мотивировка и актуалност на темата, цели и задачи, както и организация на изложението в дисертацията.

Водещ подход в представените изследвания е мотивираното предпочитание към h -версия на МКЕ. В конкретния случай това означава използване на крайни елементи от по-ниска степен (например линейни), след което се търси повишаване на точността на решението с помощта на изчислително ефективни и по възможност локални апостериорни процедури.

Глава 1

Тази глава е озаглавена “Смесен МКЕ за спектрални и интегродиференциални задачи – вариационни аспекти и оценки”.

Тя се състои от седем раздела в обем от 69 страници. В сравнение с първия вариант на дисертацията, в структурата на тази глава няма съществени промени. Положени са усилия за подобряване на стила.

Във въведението са систематизирани преимущества на вариационните методи в смесена постановка и в частност на смесения МКЕ. В Раздел 1.2 и Раздел 1.3 е представена съответно смесена вариационна постановка на едномерни и многомерни спектрални задачи от четвърти ред. Показано е как се извеждат достатъчни условия за

симетрия при параметрично зададена постановка на смесената вариационна задача. Раздел 1.4 е посветен на постпроцедура (уточняваща процедура) за ускоряване на сходимостта на смесения МКЕ за бихармонична спектрална задача. Предложението „метод на двете пространства“ се основава на идеята на Xu и Zhou [2001] за „метод на двете мрежи“. Получените нови резултати демонстрират някои преимущества, свързани с изчислителната сложност на p – метода пред h – метода. Уточненото числено решение с оценка на грешката от тип суперсходимост се получава с помощта на решаването на една допълнителна елиптична задача върху същата мрежа, но с крайни елементи от по-висока (трета) степен. Нека напомним, че изчислителната сложност на численото решаване на елиптична задача е по-малка от сложността на решаване на съответната спектрална задача. Това е в сила дори когато и за двете задачи се прилага асимптотично оптимален итерационен метод. Раздел 1.5 изследва интересния и по-труден за анализ случай на ускоряване на сходимостта при използване на линейни крайни елементи в смесения МКЕ за бихармонична спектрална задача. Това е така, тъй като оценки (1.35) и (1.36) не са в сила при $n=1$. Специално място в тази глава заема Раздел 1.6, където е изследван смесен МКЕ за интегродиференциален модел от теория на вискоеластичността. Задачата е актуална и трудна. В края на раздела е получена оценка за устойчивост на приближеното решение, която независимо че не е формулирана като теорема (и дори няма номер), е може би най-интересният резултат в този раздел. В следващия Раздел 1.7 са представени резултати от числени експерименти. Така например, в Пример 1.2 е демонстрирано прилагане на метода от Раздел 1.6 за числено решаване на вискоеластична моделна задача. За дискретизация по пространствените променливи е използвана неравномерна триъгълна мрежа. Направен е качествен анализ на полученото решение. Показана е асимптотична близост на решенията на динамичния и квазистатичния модел при увеличаване на времето. Както вече отбелязах, в тази глава особено добро впечатление правят резултатите в Раздел 1.5 и Раздел 1.6.

Глава 2

Глава 2 е посветена на решаване на спектрални задачи с нелокални гранични и интерфейсни условия. В тази глава също няма съществени промени в сравнение с първия вариант на дисертацията.

В рамките на 45 страници са включени шест раздела.

Във въведението е представена мотивация за изследванията, в това число някои приложни области, където възникват такива задачи, като: оразмеряване на композитни материали; пренос на топлина между контактуващи тела; акустика. В Раздел 2.2 е предложен общ подход за конструиране на вариант на МКЕ за решаване на спектрални задачи от втори ред с нелокални (интегрални) условия за съгласуване на решението по вътрешните граници и съгласувани нормални производни. Предложена е естествена дискретизация с конформни квадратични триъгълни и биквадратични правоъгълни елементи, където локалната (възлова) степен на свобода в средите на страните е заменена с интегрална. Доказана е съгласувана оценка за сходимост. В Раздел 2.3 е приложен метода на „двете пространства“ и е получен резултат от тип суперсходимост. Тук трябва да отбележим високите изисквания за гладкост на решението. Такива например са оценки (2.33) и (2.36), където се предполага, че решението принадлежи на $H^5(\Omega)$. Независимо от това резултатите правят много добро впечатление. Следваща стъпка в изследването на нелокални интерфейсни условия са задачите с интегрални

условия върху припокриващи се подобласти, които са разгледани в Раздел 2.4. Получена е оптимална по порядък съгласувана оценка за грешката за моделна задача в област съставена от два припокриващи се правоъгълника. Тук условието за гладкост от $H^3(\Omega)$ е съгласувано с порядъка на грешката. При тази постановка част от анализа по същество е едномерен, което дава възможност за получаване на точни оценки за близост на интерполанта. В Раздел 2.5. са получени аналогични резултати за спектрална контактна задача, описваща преноса на маса и енергия между две допиращи се тела. Нелокалните контактни условия се налагат върху подобласт с ширина ε . Последният раздел съдържа числени експерименти за моделни задачи илюстриращи предходните теоретични резултати. В тази глава добро впечатление прави последователно усложняване на постановката на разглежданите задачи.

Глава 3

Тази глава съдържа резултати свързани с анализ и приложения на неконформни крайни елементи. В представения нов вариант на дисертацията са направени най-големи изменения в тази глава. Това без съмнение е свързано и с най-сериозните забележки в рецензиите на първия вариант на дисертационния труд. Освен това, от новия текст са изключени Раздел 3.6 и Раздел 3.7, които бяха посветени на изследвания за неконформни крайни елементи на Зенкевич.

Глава 3 се състои от 65 страници, като отново това е най-голямата глава, включваща 9 раздела, в това число въведение и числени експерименти.

Раздел 3.2 е посветен на изследване на свойствата на линейния елемент на Crouzeix-Raviart и ротирания билинеен елемент на Rannacher-Turek. В следващия раздел са разгледани интерполирани крайни елементи, като получените оценки за ускоряване на сходимостта са представени в Теорема 3.3 и Теорема 3.4. Интересен е и резултатът в Теорема 3.5, който показва пример при който този интерполационен подход не може да бъде приложен. Раздел 3.4 е посветен на реализация в случая на неконформни елементи на метода на „двете пространства“ за получаване на оценки от тип суперсходимост за спектрални задачи от втори ред. В следващия раздел е изследвано приложението на неконформен четириъгълен краен елемент на Morley за числено решаване на елиптически задачи от четвърти ред. Принципно нов тип резултати са представени в следващите три раздела. Добре известно е, че при прилагане на конформни крайни елементи, числено пресметнатите собствени стойности са по-големи или равни на точните. В Раздел 3.6 и Раздел 3.7 е показано, че при разглежданите неконформни крайни елементи са в сила долни граници за спектрални задачи от втори и четвърти ред. На тази основа, в Раздел 3.8 е предложен алгоритъм за двустранни оценки на собствените стойности. В последния Раздел 3.9 са представени числени експерименти за пет моделни задачи.

Глава 4

Целта на тази глава е да се покаже, как теоретични подходи от дисертацията могат да се приложат за математическо моделиране и числено решаване на приложни задачи от областта на механика на конструкциите.

Главата е в обем от 44 страници и е озаглавена „Крайноелементно моделиране и анализ на задачи за греди“.

Приложенията са ограничени до едномерни модели. Последователно са разгледани следните задачи: а) пресмятане на динамични напрежения в греда на еластична основа; б) греда върху основа с променлива коравина; в) модел на свредло, закрепено в тричелюстник; г) модел на ветрогенераторна перка. Приемам, че резултати от този тип са полезни за популяризиране на съвременни числени методи и тяхното приложение.

4. Аprobация на представените резултати

Представеният списък на публикации по дисертационния труд включва 30 статии, публикувани в периода 2002 – 2013 г. От тях 5 са самостоятелни, 17 са съвместно с А. Андреев, а останалите 8 са с повече от един съавтор. В международни списания и списания с *импакт фактор* са публикувани 8 работи, в това число: а) *Computational Methods in Applied Mathematics* – 1; б) *Siberian Journal of Numerical Mathematics* - 3; в) *Mathematica Balkanica* – 2; г) *Journal of Computational and Applied Mathematics* – 1; д) *Comp. rend. Acad. Bulg. Sci.* – 1; е) *Application of Mathematics* - 1. В специализирани токове на Springer Lecture Notes in Computer Science (LNCS) са публикувани 11 статии. Две от списанията, както и поредицата LNCS до 2005 г. са с *импакт фактор*.

Резултати, включени в дисертацията са докладвани също така (освен публикуваните доклади на конференции) на семинари в ИИКТ, ТУ – Габрово, Finite Element Center – Chalmers University of Technology, Sweden, както и на годишни семинари на българската секция на SIAM.

Представен е също така списък от 61 цитирания на публикации, включени в дисертационния труд. От тях, 40 са в работи на чуждестранни автори. Това ми дава основание да направя извода, че публикуваните резултати на доц. Милена Рачева са добре познати и използвани от научната колегия.

Авторефератът коректно представя резултатите, включени в дисертацията. Формулировката на основните научни приноси, съответства на изложението в дисертацията.

Представените публикации по дисертацията, както и справката за тяхното цитиране удовлетворяват изискванията на ЗРАС, ППЗРАС, както и специфичните изисквания в правилниците на БАН и на ИИКТ-БАН за присъждане на научната степен “Доктор на науките”.

5. Критични бележки и препоръки

В рецензията за първия вариант на дисертацията имах някои съществени критични бележки и препоръки, които са отчетени в представения нов вариант. Това в частност се отнася до стила на изложението и по строгото придържане към установената терминология. С цел избягване на неточности, появяващите се в текста имена се изписват на латиница, така както са цитирани в ползваните оригинални източници.

Ще се спра специално на някои от по-сериозните критични бележки в рецензията за първия вариант и начина на тяхното отстраняване:

1. В първата рецензия имаше критични бележки за непълнота в доказателствата на Теорема 3.1 и Теорема 3.2. от Раздел 3.2 „Неконформен елемент на Крузе-Рабиар от интегрален тип“. Тези теореми не са включени в новия вариант на дисертацията.

2. В първата рецензия имаше съществени забележки по доказателството на Теорема 3.11. В новия вариант към условието на Теорема 3.10 и Теорема 3.11 е добавено условие за ограниченост отдолу на грешката за собствените функции (виж (3.48) и (3.58)). По този начин представените резултати са коректни. Остава открит въпросът за необходимостта на условието.
3. В първата рецензия имаше забележка за грешка в доказателството на Теорема 3.14 от Раздел 3.10 „Нов алгоритъм за двустранни оценки на собствените стойности“. В новия вариант на дисертацията тази теорема е заменена от две нови. В Теорема 3.13 е представен коригиран вариант на доказателство на двустранна оценка за първата собствена стойност за елиптични задачи от втори и четвърти ред, т.е. за $m=1,2$. В Теорема 3.14 е доказана аналогична оценка за следващите собствени стойности, но само за задачи от втори ред, т.е. за $m=1$, при уточняващи предположения за използваните линейни и билинейни конформни елементи и $C-R$, $EC-R$, Q_l^{rot} и EQ_l^{rot} неконформни елементи. Доказателството на тази теорема е ново, като конструкцията се основава на представяне на отношението на Релей във вида (3.76).

С това приемам, че тези забележки в първата рецензия са коректно отстранени в новия вариант на дисертацията.

Отново ще отбележа, че с малки изключения (виж Пример 1.2 на страница 71) представените числени резултати са за максимално опростени моделни задачи, като по същество липсва анализ на получените резултати и как те потвърждават например порядъка в съответните теоретични оценки на грешката.

Тези критични бележки не намаляват по същество стойността на останалите резултати в дисертацията.

6. Лични впечатления

Познавам доц. Милена Рачева. Високо ценя нейната активна творческа работа на математик изследовател. Имам най-добри впечатления от съвместна работа по проекти през последните години.

7. Заключение

В дисертационния труд са представени научни и научно-приложни резултати, част от които са новост за науката, а други обогатяват известни вече знания. Тяхната комплексна оценка **ми дават основание** да препоръчам на научното жури да присъди на доц. д-р Милена Радославова Рачева научната степен “Доктор на науките” в професионално направление 4.5 „Математика”, научна специалност 01.01.09 “Изчислителна математика”.

24.02.2014 г.

София