Abstracts of Dissertations

Institute of Information and Communication Technologies

BULGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

IICT

2 / 2012

1869

OPTIMAL MULTILEVEL METHODS FOR NON-CONFORMING FINITE ELEMENTS

ОПТИМАЛНИ МНОГОНИВОВИ МЕТОДИ ЗА НЕКОНФОРМНИ КРАЙНИ ЕЛЕМЕНТИ

Petia Boyanova

Петя Боянова

Автореферати на дисертации

Институт по информационни и комуникационни технологии

БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ

ISSN: 1314-6351

Поредицата ***„Автореферати на дисертации на Института по информационни и комуникационни технологии при Българската академия на науките“*** *представя в електронен формат автореферати на дисертации за получаване на научната степен „Доктор на науките” или на образователната и научната степен „Доктор”, защитени в Института по информационни и комуникационни технологии при Българската академия на науките. Представените трудове отразяват нови научни и научно-приложни приноси в редица области на информационните и комуникационните технологии като Компютърни мрежи и архитектури, Паралелни алгоритми, Научни пресмятания, Лингвистично моделиране, Математически методи за обработка на сензорна информация, Информационни технологии в сигурността, Технологии за управление и обработка на знания, Грид-технологии и приложения, Оптимизация и вземане на решения, Обработка на сигнали и разпознаване на образи, Интелигентни системи, Информационни процеси и системи, Вградени интелигентни технологии, Йерархични системи, Комуникационни системи и услуги и др.*

The series ***Abstracts of Dissertations of the Institute of Information and Communication Technologies at the Bulgarian Academy of Sciences*** *presents in an electronic format the abstracts of Doctor of Sciences and PhD dissertations defended in the Institute of Information and Communication Technologies at the Bulgarian Academy of Sciences. The studies provide new original results in such areas of Information and Communication Technologies as Computer Networks and Architectures, Parallel Algorithms, Scientific Computations, Linguistic Modelling, Mathematical Methods for Sensor Data Processing, Information Technologies for Security, Technologies for Knowledge management and processing, Grid Technologies and Applications, Optimization and Decision Making, Signal Processing and Pattern Recognition, Information Processing and Systems, Intelligent Systems, Embedded Intelligent Technologies, Hierarchical Systems, Communication Systems and Services, etc.*

e-ISSN: 1314-6351

www.iict.bas.bg/dissertations

BULGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

ABSTRACT OF PhD THESIS

OPTIMAL MULTILEVEL METHODS FOR NON-CONFORMING FINITE ELEMENTS

Petia Todorova Boyanova

Supervisor: Prof. Svetozar Margenov

Approved by Supervising Committee:

Assoc. Prof. Krassimir Georgiev
Prof. Andrey Andreev
Prof. Stefka Dimova
Prof. Svetozar Margenov
Prof. Stefan Radev

Institute of Information and Communication Technologies
Department of Scientific Computations

The results, included in the PhD thesis, were presented and discussed at an extended session of the Department of Scientific Computations, IICT-BAS, on September 8, 2011. It was decided that a PhD defense should take place.

The defense of the PhD thesis was held on December 20, 2011 at 15:30 in Room 218, Block 25A, IICT-BAS.

The full volume of the dissertation is 135 pages. It consists of an introduction, four chapters, conclusions, and a list of references with 79 titles. The dissertation contains 16 tables and 18 figures. The thesis is based on the following publications:

- P. Boyanova, S. Margenov, *Multilevel Splitting of Weighted Graph-Laplacians Arising in Non-conforming Mixed FEM Elliptic Problems*, Numerical Analysis and Its Applications, Springer LNCS 5434, 2009, 216-223.

- P. Boyanova, S. Margenov, *Numerical Study of AMLI Methods for Weighted Graph-Laplacians*, Large-Scale Scientific Computing, Springer LNCS 5910, 2010, 84-91.

- P. Boyanova, S. Margenov, *On Optimal AMLI Solvers for Incompressible Navier-Stokes Problems*, AIP Conference Proceedings vol. 1301, 2010, 457-467.

- P. Boyanova, S. Margenov, M. Neytcheva, *Robust AMLI Methods for Parabolic Crouzeix-Raviart FEM Systems*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 235(2) (2010), 380-390.

- P. Boyanova, S. Margenov, *On Multilevel Iterative Methods for Navier-Stokes Problems*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 40, Number 1, 2010, 51-60.

- P. Boyanova, S. Margenov, *Robust Multilevel Methods for Elliptic and Parabolic Problems*, invited chapter in: O. Axelsson, J. Karatson, Efficient preconditioning methods for elliptic partial differential equations, Bentham Science Publishers, 2011, 3-22.

- P. Boyanova, I. Georgiev, S. Margenov, L. Zikatanov, *Multilevel Preconditioning of Graph-Laplacians: Polynomial Approximation of the Pivot Blocks Inverses*, submitted.

Keywords: iterative method, preconditioning, optimal order preconditioner, multilevel method, AMLI, CBS constant, non-conforming FEM, Crouzeix-Raviart FEM, parabolic PDE, graph-Laplacian, Navier-Stokes.

1 Outline of the thesis

A substantial part of the existing algorithms for the numerical simulation of processes, modeled by differential equations, involve solutions of algebraic systems of equations. It turns out that, when performing numerical simulations, the solution of such systems constitutes the major share of the required computer resources. The development, analysis, and implementation of efficient methods to solve linear systems with sparse matrices are main research directions in the field of scientific computations and are the focus of this thesis.

Due to their lesser demands for computer resources, iterative solution methods are the choice to make, when very large scale simulations have to be performed. To improve their efficiency, iterative methods are combined with proper techniques to accelerate the convergence to an approximate solution with a desired accuracy. A general technique to accelerate the convergence of iterative methods is to use a preconditioner. Constructing and analyzing various preconditioning methods has been an active field of research already for decades. Special attention is devoted to the class of the so-called optimal order preconditioners, that possess both optimal convergence rate and optimal computational complexity. The preconditioning techniques, proposed and studied in this thesis, lead to methods that are of optimal order.

We consider the so-called Algebraic MultiLevel Iteration (AMLI) methods. The developed AMLI preconditioners are based on an approximated block factorization of the original system matrix, where the partitioning is associated with a sequence of nested discretization meshes. Two are the key ingredients for the efficiency of the AMLI preconditioners. The first one is the quality of the utilized block two-by-two splitting, quantified by the so-called Cauchy-Bunyakowski-Schwarz (CBS) constant, which measures the abstract angle between the two related finite element subspaces. The second one is the construction of a proper approximation of the pivot blocks in the multilevel factorization.

This thesis deals with solution methods for sparse systems, resulting from non-conforming finite element (FE) discretizations of partial differential equations (PDEs). The linear conforming finite elements are widely used in applications, however, in many cases the non-conforming elements have their strong advantages. As an example, the use of non-conforming FEs in a projection method for the incompressible Navier-Stokes (N-S) equations leads to stable locally conservative schemes, see e.g. [8, 14]. Some other examples of applications of non-conforming FEM can be found in, e.g., [1, 15].

In this thesis, we develop AMLI preconditioners for parabolic equations, discretized by linear non-conforming Crouzeix-Raviart finite elements. Optimal multilevel methods for elliptic problems in mixed form are also constructed, for the case of non-conforming finite element discretizations in two space dimensions. We perform theoretical analysis of the splittings, proposed for the two considered problems, and derive robust estimates for the associated CBS constants. We develop a preconditioner for the pivot blocks, based on polynomial approximation of their inverses, and apply it within the solution method for the considered elliptic problems in mixed form. The developed AMLI methods are applied for the simulation of fluid flow, modeled by the incompressible Navier-Stokes (N-S) equations. We propose a composite time-stepping solution method for the N-S problem, based on optimal multilevel preconditioning of the systems, obtained by a stable, locally conservative discretization with non-conforming finite elements. The theoretical analysis of the solution methods presented in this thesis is combined with numerical studies that confirm their efficiency.

2 Introduction

The finite element method (FEM) is a major tool for the numerical solution of differential equations (see e.g. [3, 12, 13]). The usual FEM approach is to consider the problem in a weak formulation, and then approximate the solution by a function in a properly chosen finite-dimensional subspace $\mathcal{V}_h$. Most often $\mathcal{V}_h$ is chosen to consist of piece-wise polynomials, defined for a finite element triangulation (mesh) $\mathcal{T}_h$ of the domain. If $\mathcal{V}_h$ is not a subspace of the Sobolev space $\mathcal{V}$, where the variational problem is defined, the method is called non-conforming, i.e. a discretization with non-conforming FEs. An example of non-conforming FE is the Crouzeix-Raviart FE, see e.g. [12].

In order to find an approximate solution $u_h \in \mathcal{V}_h$, one has to solve a system of linear algebraic equations in the form

$$A\mathbf{u} = \mathbf{b}, \tag{1}$$

where $\mathbf{u} = \{u_i\}_{i=1}^N$ is an unknown vector, $u_h = \sum_{i=1}^{N} u_i \phi_i$. The FEM basis functions $\phi_i \in \mathcal{V}_h$ have local support, thus, $A \in \mathbf{R}^{N\times N}$ is a sparse matrix. The discrete systems, studied in this thesis, have symmetric positive definite (s.p.d.) matrices.

We consider the solution of (1) via an iterative method. Iterative algorithms generate a sequence, $\{\mathbf{x}^k\}, k = 1, 2, ...,$ of approximate solutions with improving accuracy. The convergence rate, i.e. the number of iterations, needed to obtain an approximation with a desired accuracy, depends on the properties of the system matrix A. When the system (1) has an s.p.d. matrix, the rate of convergence is often estimated using the so-called spectral condition number $\kappa(A) = \dfrac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}$, where $\lambda_{\max}(A)$ and $\lambda_{\min}(A)$ are the maximum and minimum eigenvalues of A. When using methods, such as the conjugate gradient or the Chebyshev method, a well-known upper bound of the number of iterations $k(\epsilon)$, required to ensure that $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{k(\epsilon)}\|_A \le \epsilon \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|_A$, $\forall \mathbf{x}^0 \in \mathbf{R}^N$, is the following (see e.g. [3])

$$k(\epsilon) \le \frac{1}{2}\sqrt{\kappa(A)} \ln\left(\frac{2}{\epsilon}\right). \tag{2}$$

For various problems, due to the properties of the corresponding matrix A, applying an iterative method to the original system (1) results in poor convergence and thus, high overall computational complexity of the algorithm. For example, for systems arising in discretizations of second-order elliptic problems on a mesh with characteristic size h, the estimate

$$\kappa(A) = O(h^{-2})$$

holds true, see e.g. [3]. Thus, as (2) suggests, when the spatial step size h is decreased in order to obtain better discrete approximation, the number of iterations increases as h^{-1}.

The convergence of an iterative method can be speeded up by using preconditioning. The general understanding of a preconditioner (see e.g. [2]) is that it acts as an accelerator of the iterative solution method by formally replacing the solution of the system (1) by an equivalent problem, for example in the form

$$C^{-1}A\mathbf{x} = C^{-1}\mathbf{b}, \tag{3}$$

where C is a properly chosen preconditioner. In order to obtain an efficient preconditioning method, the combined action of $C^{-1}A$ should resemble as much as possible that of the identity matrix of corresponding size. For s.p.d matrices A and C, as also seen from the estimate (2) where $\kappa(A)$ is substituted by $\kappa(C^{-1}A)$, this translates to a condition number $\kappa(C^{-1}A)$ of order one ($O(1)$). At the same time, it should be possible to solve auxiliary systems with the preconditioner C at low computational cost.

A preconditioned iterative method is said to have an optimal rate of convergence when the number of iterations, required to converge up to a chosen stopping criterion, is independent of the number of degrees of freedom of the problem. It is said to have optimal computational complexity, when the number of arithmetic operations, performed per degree of freedom per iteration is bounded from above independently of the number of degrees of freedom. Preconditioning methods, which possess both optimal rate of convergence and optimal computational complexity, are referred to as optimal order methods.

The Algebraic MultiLevel Iteration method is an optimal preconditioning technique, proposed first in [5, 6] for the case of elliptic problems, discretized by conforming linear finite elements. Later, the approach has been generalized also for non-conforming discretizations (e.g. in [9, 10, 11, 16, 17, 24]), discontinuous Galerkin methods (e.g. in [22, 21, 23]), techniques were developed for the construction of variable-step, also known as nonlinear, AMLI preconditioners, see e.g. [7, 4, 19]. The method is based on a recursive generalization of so-called two-level preconditioners.

Consider a two-by-two block partitioning of a sparse s.p.d. matrix in the form

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Then, provided that A_{11} is non-singular, the following exact block factorization

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \\ A_{21} & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & A_{11}^{-1}A_{12} \\ & I_2 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

holds true. It follows from (4), that systems with A can be solved by solving subsystems with the pivot block A_{11} and the so-called Schur complement $S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$. In general, S is a dense matrix. Different two-level preconditioners are based on substituting some of the blocks in the exact factorization (4) by properly chosen sparse approximations. One natural idea is to approximate S by A_{22}, neglecting the term $-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ in a preconditioner of the form

$$C_F = \begin{bmatrix} A_{11} & \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & A_{11}^{-1}A_{12} \\ & I_2 \end{bmatrix},$$

The quality of the latter preconditioner can be measured via the so-called CBS constant γ, corresponding to the two-by-two block splitting, imposed on A. The CBS constant is associated with the cosine of the abstract angle between the two subspaces, defined by the two-by-two block splitting, and in general $\gamma < 1$. The following condition number estimate has been shown (see, for instance, [2]):

$$\kappa(C_F^{-1}A) \leq \frac{1}{1-\gamma^2}. \tag{5}$$

Clearly, the above estimate makes sense only if $\gamma \ll 1$. Aiming at constructing optimal methods, we also see that γ should be ideally independent on h. One important aspect of the techniques, discussed in this thesis, is the choice of a proper block two-by-two splitting, for which those properties hold true. Here, we consider a framework for constructing optimal multilevel preconditioners defined for a hierarchy of nested triangulations of the domain.

Consider a sequence of nested meshes, $\mathcal{T}^0 \subset \cdots \subset \mathcal{T}^\ell$, obtained via $k, 1 \leq k \leq \ell$, regular refinements of a given coarse mesh $\mathcal{T}^0$, where $N_0 < \cdots < N_\ell$ are the corresponding numbers of degrees of freedom. We denote by $A^{(k)}$ the matrix that corresponds to a standard FEM discretization on $\mathcal{T}^k$. Let $\widetilde{A}^{(k)}$ be a hierarchical representation of $A^{(k)}$,

$$\widetilde{A}^{(k)} = J^{(k)}A^{(k)}(J^{(k)})^T = \begin{bmatrix} \widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{12} \\ \widetilde{A}_{21} & \widetilde{A}_{22} \end{bmatrix},$$

defined via a two-level sparse transformation matrix $J^{(k)}$ such that $A^{(k-1)}$ is reproduced in $\widetilde{A}_{22}$. The AMLI preconditioner $C^{(k)}$ of $A^{(k)}$ on level of refinement k is defined as

$$C^{(k)} = (J^{(k)})^{-1} \begin{bmatrix} \widetilde{C}_{11}^{(k)} & \\ \widetilde{A}_{21}^{(k)} & Z^{(k-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & (\widetilde{C}_{11}^{(k)})^{-1}\widetilde{A}_{12}^{(k)} \\ & I_2 \end{bmatrix} (J^{(k)})^{-T} \tag{6}$$

where $\widetilde{C}_{11}^{(k)}$ is a proper approximation of $\widetilde{A}_{11}^{(k)}$ and $C^{(0)} = A^{(0)}$. The direct use of $Z^{(k-1)} = A^{(k-1)}$ leads to a class of methods with condition number $\kappa((C^{(\ell)})^{-1}A^{(\ell)})$ that grows with the increase of the number of levels ℓ, see e.g. [20]. In order to obtain an optimal preconditioner, this approach is combined with various types of stabilization techniques. One such technique, applied for the construction of so-called linear AMLI methods, is to use a specially constructed matrix polynomial at some or all levels of refinement, namely

$$Z^{(k-1)} = A^{(k-1)}(I - P_{\beta_k}((C^{(k-1)})^{-1}A^{(k-1)}))^{-1}, \tag{7}$$

where P_{β_k} is a polynomial of degree β_k with the property $P_{\beta_k}(0) = 1$. Another approach is to define the action of $Z^{(k-1)}$ via some inner iterations with the preconditioned conjugate gradient (PCG) method for systems with the matrix $A^{(k-1)}$ preconditioned by $C^{(k-1)}$. This results in AMLI algorithms, known as variable-step or nonlinear, see e.g. [7, 4, 19, 20].

Assume that:

(i) The CBS constants γ^k, corresponding to the two-level partitionings of $\widetilde{A}^{(k)}$, $1 \leq k < \ell$, satisfy the bound $\gamma^k \leq \gamma$ independently on discretization parameters for some $\gamma < 1$;
(ii) The pivot block approximations satisfy

$$\mathrm{v}^T \widetilde{A}_{11}^{(k)} \mathrm{v} \leq \mathrm{v}^T C_{11}^{(k)} \mathrm{v} \leq (1+\xi) \mathrm{v}^T \widetilde{A}_{11}^{(k)} \mathrm{v}, \quad \forall \mathrm{v}. \tag{8}$$

Then the following condition

$$\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} < \beta < \min_k \frac{N_k}{N_{k-1}}, \tag{9}$$

for the optimality of the preconditioner (6) with $\beta_k = \beta$ in (7) holds true (see e.g. [5, 6, 20]), with

$$\kappa({C^{(l)}}^{-1} A^{(l)}) \approx (1+\xi)/(1-\gamma^2).$$

3 Multilevel methods for linear parabolic problems

In Chapter 2 of the dissertation we consider the second-order parabolic equation:

$$\begin{array}{rcll} \frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x},t) - \nabla \cdot (\mathbf{a}(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x},t)) & = & f(\mathbf{x},t) & \text{in} \quad \Omega \times (0,T], \\ u(\mathbf{x},0) & = & u_0 & \text{in} \quad \Omega, \\ u(\mathbf{x},t) & = & u_D & \text{on} \quad \Gamma_D, \\ (\mathbf{a}(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x},t)) \cdot \mathbf{n} & = & u_N & \text{on} \quad \Gamma_N, \end{array} \tag{10}$$

where Ω is a polygonal domain in $\mathbf{R}^2$, $f(\mathbf{x},t) \in L^2(\Omega)$ is a given function, $\mathbf{n}$ is the outward normal unit vector to the boundary $\partial\Omega = \overline{\Gamma}_D \cup \overline{\Gamma}_N$, $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \{a_{ij}(\mathbf{x})\}_{i,j \in \{1,2\}}$ is a bounded s.p.d. matrix with elements $a_{ij}(\mathbf{x})$ that are piecewise smooth functions in $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

We use C-R finite elements to discretize (10) in space, and the θ-method for the time discretization. This leads to the following linear system to be solved at each time step

$$A\mathbf{u}^n \equiv (M + \Delta t(1-\theta)K)\mathbf{u}^n = \mathbf{g}^n, \tag{11}$$

where the right-hand side vector depends on the approximate solution at a previous time step. Here, Δt is the time step, θ is the method parameter, $0 \leq \theta \leq 1$, and M and K denote the FEM mass and stiffness matrices, correspondingly.

The degrees of freedom for the C-R finite element are associated with the midpoints of element edges. The C-R FEM spaces corresponding to a series of regular refinements of a coarse mesh $\mathcal{T}^0 \subset \cdots \subset \mathcal{T}^\ell$, are not nested, and the definition of transformations $J^{(k)}$ to allow for the utilization of the presented framework of the AMLI method is neither obvious nor unique.

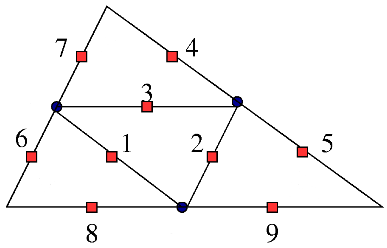


Fig. 1: A Crouzeix-Raviart macroelement

In the thesis we consider the so-called *differences and aggregates* (DA) and *first reduce* (FR) approaches, proposed for the first time in [10, 11] for the construction of hierarchical two-level C-R transformations for discrete elliptic systems. The transformations $J^{(k)}$ are defined on a per-macroelement basis, where a macroelement consists of four congruent fine elements, obtained by uniform refinement of a coarse element, see Figure 1. Under these transformations, the hierarchical basis functions, associated with the coarse mesh, are obtained as aggregates of nodal basis functions on the fine mesh.

We perform analysis of the CBS constant for the DA hierarchical splitting of a parabolic discrete system matrix and derive the estimate

$$\gamma^k \leq \sqrt{\frac{3}{4}},$$

that holds true for the all $1 \leq k \leq \ell$ independent on mesh size and mesh anisotropies.

We prove the following spectral equivalence relations that link the Schur complements $\widetilde{S}^{(k)} = \widetilde{A}_{22}^{(k)} - \widetilde{A}_{21}^{(k)}(\widetilde{A}_{11}^{(k)})^{-1}\widetilde{A}_{12}^{(k)}$ to the matrices on coarser meshes $\mathcal{T}^{k-1}$:

$$\frac{1}{4}(M^{(k-1)} + \Delta t(1-\theta)4K^{(k-1)}) \leq \widetilde{S}^{(k)} \leq (M^{(k-1)} + \Delta t(1-\theta)4K^{(k-1)}),$$

$$\frac{1}{2}A^{(k-1)} \leq \widetilde{S}^{(k)} \leq 4A^{(k-1)}.$$

The performed analysis suggests two possible ways to construct a multilevel AMLI preconditioner $C^{(\ell)}$. The current Schur complement can be approximated by using the matrix $M^{(k-1)} + 4^{\ell-k+1}\Delta t(1-\theta)K^{(k-1)}$ or by using the system matrix $A^{(k-1)}$ itself. In the numerical study, presented in the thesis, we consider the latter approximation. The numerical results confirm the optimal properties and the robustness of the proposed AMLI preconditioner for parabolic problems.

A comparative study of AMLI methods for parabolic equations is also included in the thesis. We consider estimates and numerical analysis for the CBS constants, corresponding to C-R DA and FR splittings and a hierarchical partitioning of the parabolic system matrix obtained by a conforming finite element discretization. We observe that the AMLI methods for non-conforming FEM are advantageous in cases of strong mesh anisotropy.

4 Multilevel methods for weighted graph-Laplacians

A second order elliptic problem in a mixed formulation is considered in Chapter 3 . The unknown functions are a vector, that we refer to as velocity, and a scalar, referred to as pressure. We use C-R FEs for the velocity and piece-wise constants to discretize the pressure. Since the C-R mass matrix is diagonal, the velocity can be eliminated exactly. The reduced system for the pressure has a matrix A with a structure of a weighted graph-Laplacian. In the case of a regular mesh of right-angled triangles, considered in this work, this matrix corresponds to the T-shaped four point stencil, shown in Figure 2.

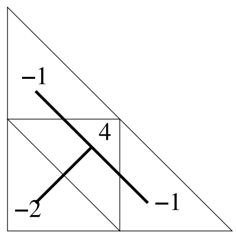


Fig. 2: Four point stencil for the pressure

We propose a family of two-level hierarchical splittings of the matrix A, based on its representation as a sum of specially introduced local macroelements, associated with edges of coarse mesh elements, see Figure 3. We show that the second diagonal block in these partitionings coincides with the graph-Laplacian on a coarser mesh, which allows for the multilevel generalization of the approach. The following estimate for the CBS constant is derived

$$\gamma^k \le \sqrt{0.58}. \tag{12}$$

As a second step in the construction of an AMLI method for weighted graph-Laplacians, we present an approximation for the inverse of the pivot block A_{11} in the hierarchical splitting. To precondition A_{11}^{-1}, we use the best polynomial approximation of x^{-1} in L_∞ norm on the interval $[\lambda_{min}, \lambda_{max}]$, where λ_{min} and λ_{max} are some proper estimates of the minimum and maximum eigenvalues of A_{11}. When a polynomial of degree ν is used, the error of the approximation is

$$E(\nu) = \frac{8\sigma\theta^{-\nu}}{(\theta - \theta^{-1})^2}, \ \sigma = \frac{1}{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}, \ a = \frac{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}, \ \theta = a + \sqrt{a^2 - 1}.$$

We show the following equality

$$\xi = (1 + E(\nu)\lambda_{\max})/(1 - E(\nu)\lambda_{\max}) - 1$$

for the constant ξ in (8). An important property of the proposed approach is that it leads to a multilevel preconditioner for the weighted graph-Laplacian, that is a linear operator.

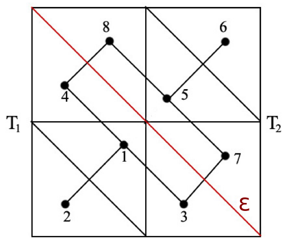
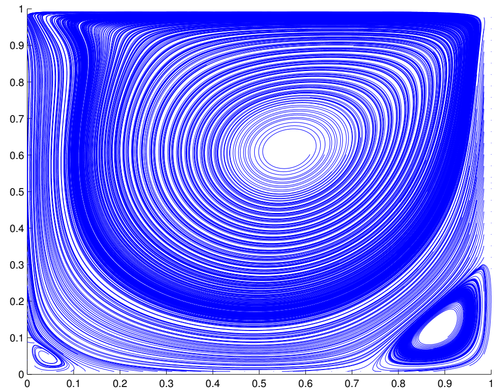


Fig. 3: Macroelement corresponding to a hypotenuse

5 Multilevel methods for the Navier-Stokes equations

The last chapter of the thesis is devoted to efficient algorithms for the numerical solution of the time-dependent Navier-Stokes (N-S) equations for incompressible fluid flow in two space dimensions. The results, presented here, demonstrate the application of the multilevel methods, proposed in previous chapters, in this important field of computational science.

Fig. 4: Velocity streamlines, $Re = 400$



In this work, the so-called projection approach is considered for the numerical solution of the N-S equations. The method is based on the decomposition of L^2 -vector fields into the direct sum of divergence-free fields and curl-free fields (see e.g. [18]). We use the inf-sup stable and locally conservative finite element discretization with C-R FE for the velocity and piece-wise constants for the pressure, (see [14], or also [8]).

We apply a projection scheme, that splits the N-S problem into two linear systems that have to be solved in turn at each discrete time instance. At the so-called prediction step we need to solve two disjoint parabolic problems for the components of the velocity. At the so-called projection step, an elliptic problem in mixed form arises, like the one, discussed in Section 4. The composite multilevel method, developed in this thesis, is based on the application of optimal AMLI preconditioners for the solution of all subproblems in the time-stepping algorithm.

The properties of the proposed solution method for the N-S equations are illustrated with

Refinements ℓ	$IT(u)$	$IT(u)$	$IT(p)$
	Av. number of iterations, tol. 10^{-9}		
1	3	3	17
2	4	4	18
3	6	5	19
4	8	7	19

Table 1: Behavior of the composite time-stepping method, $Re = 1000$

a numerical study for the case of the so-called lid driven cavity flow problem, see Figure 4. Some results for the case of a Reynolds number Re equal to 1000 are shown in Table 1. The different columns contain average number of iterations, needed to solve the subproblems for the velocities u and v, and the pressure p. Here, the slight growth of the number of iterations for solving the two parabolic problems, is due to the use of less stabilization steps in the AMLI algorithm, see (9). This leads to sub-optimal convergence rate but lower computational complexity at each iteration. The average number of iterations needed to solve the problem for the pressure is larger than the number of iterations, performed for computing the velocities. Note, however, that the graph-Laplacian system is of smaller size than the two parabolic systems.

6 Contributions

The main contributions of this thesis are the following.

1. Development of a multilevel preconditioner for parabolic problems, discretized by Crouzeix-Raviart finite elements. Analysis of the CBS constant in a DA splitting of the mass matrix and generalization of the result for the case of a discrete parabolic system.

2. A comparative study of robust multilevel methods for parabolic problems, discretized by conforming Courant and non-conforming Crouzeix-Raviart finite elements. Numerical analysis of the influence of mesh anisotropy.

3. Development of a solution method for systems, obtained via a non-conforming discretization of second-order elliptic problems in mixed form. The solution of the discrete problem is reduced to the solution of a system with a weighted graph-Laplacian matrix. We propose a hierarchical splitting for such problems and derive an estimate for the CBS constant in the case of a regular mesh of right-angled triangles.

4. Development of polynomial approximation of the inverse of an s.p.d. matrix and analysis of the corresponding preconditioned matrix. The proposed approach is applied for the approximation of the pivot blocks in an AMLI method for weighted graph-Laplacians.

5. Development of a composite multilevel method for the solution of the time-dependent incompressible Navier-Stokes equations, discretized via a stable, locally conservative, non-conforming finite element pair.

6. Software implementation of the proposed optimal multilevel methods and their numerical analysis.

References

[1] D. N. Arnold and F. Brezzi. Mixed and nonconforming finite element methods: Implementation, postprocessing and error estimates. *RAIRO Model. Math. Anal. Numer.*, 19:7–32, 1985.

[2] O. Axelsson. *Iterative solution methods.* Cambridge University Press, 1994.

[3] O. Axelsson, V. Barker, *Finite element solution of boundary value problems: Theory and computations*, Academic Press, 1984.

[4] O. Axelsson and A. Padiy. On the additive version of the algebraic multilevel iteration method for anisotropic elliptic problems. *SIAM J. Sci. Comput.*, 20:1807–1830, 1999.

[5] O. Axelsson and P. S. Vassilevski. Algebraic multilevel preconditioning methods I. *Numer. Math.*, 56:157–177, 1989.

[6] O. Axelsson and P. S. Vassilevski. Algebraic multilevel preconditioning methods II. *SIAM J. Numer. Anal.*, 27:1569–1590, 1990.

[7] O. Axelsson and P. S. Vassilevski. Variable-step multilevel preconditioning methods, I: Self-adjoint and positive definite elliptic problems. *Num. Lin. Alg. Appl.*, 1:75–101, 1994.

[8] B. Bejanov, J. Guermond, and P. Minev. A locally *div*-free projection scheme for incompressible flows based on non-conforming finite elements. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 49:239–258, 2005.

[9] G. Bencheva, I. Georgiev, and S. Margenov. Two-lewel preconditioning of Crouzeix-Raviart anisotropic FEM systems. *Large-Scale Scientific Computing, Springer LNCS*, 2907:76–84, 2004.

[10] R. Blaheta, S. Margenov, and M. Neytcheva. Uniform estimate of the constant in the strengthened CBS inequality for anisotropic non-conforming FEM systems. *Numer. Lin. Alg. Appl.*, 11:309–326, 2004.

[11] R. Blaheta, S. Margenov, and M. Neytcheva. Robust optimal multilevel preconditioners for non-conforming finite element systems. *Numer. Lin. Alg. Appl.*, 12(5-6):495–514, 2005.

[12] D. Braess, *Finite Elements: Theory, Fast Solvers, and Applications in Solid Mechanics*. Cambridge University Press, 2001, Second Edition.

[13] F. Brezzi, M. Fortin, *Mixed and hybrid finite element methods*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1991.

[14] M. Crouzeix and P.-A. Raviart. Conforming and non-conforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations. *RAIRO Anal. Numér*, 7(R-3):33–76, 1973.

[15] B. A. de Dios and L. Zikatanov. Uniformly convergent iterative methods for discontinuous Galerkin discretizations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 40:4–36, 2009.

[16] I. Georgiev, J. Kraus, and S. Margenov. Multilevel preconditioning of 2D Rannacher-Turek FE problems; additive and multiplicative methods. *Springer LNCS*, 4310:56–64, 2007.

[17] I. Georgiev, J. Kraus, and S. Margenov. Multilevel preconditioning of rotated bilinear non-conforming FEM problems. *Comput. Math. Appl.*, 55:2280–2294, 2008.

[18] Girault V., Raviart P-A., *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*, Springer Series in Computational Mathematics (Theory and Algorithms). Springer: Berlin, 1986.

[19] J. Kraus. An algebraic preconditioning method for M-matrices: Linear versus nonlinear multilevel iteration. *Num. Lin. Alg. Appl.*, 9:599–618, 2002.

[20] J. Kraus and S. Margenov. *Robust Algebraic Multilevel Methods and Algorithms, Radon Series on Computational and Applied Mathematics, 5.* de Gruyter, 2009.

[21] J. Kraus and S. Tomar. A multilevel method for discontinuous Galerkin approximation of three-dimensional anisotropic elliptic problems. *Num. Lin. Alg. Appl.*, 15:417–438, 2008.

[22] J. Kraus and S. Tomar. Multilevel preconditioning of elliptic problems discretized by a class of discontinuous Galerkin methods. *SIAM J. Sci. Comput.*, 30:684–706, 2008.

[23] R. Lazarov and S. Margenov. CBS constants for multilevel splitting of graph-Laplacian and application to preconditioning of discontinuous Galerkin systems. *J. Complexity*, 23(4-6):498–515, 2007.

[24] S. Margenov and J.Synka. Generalized aggregation-based multilevel preconditioning of Crouzeix-Raviart FEM elliptic problems. *RICAM Report*, 23, 2006.

БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ

АВТОРЕФЕРАТ НА ДИСЕРТАЦИЯ

за присъждане на образователна и научна степен „доктор“
по научна специалност 01.01.09 „Изчислителна математика“,
професионално направление 4.5 „Математика“

ОПТИМАЛНИ МНОГОНИВОВИ МЕТОДИ ЗА НЕКОНФОРМНИ КРАЙНИ ЕЛЕМЕНТИ

Петя Тодорова Боянова

Ръководител: проф. дмн Светозар Маргенов

Научно жури:

доц. д-р Красимир Георгиев
чл.-кор. Стефан Радев
проф. дмн Светозар Маргенов
проф. дмн Андрей Андреев
проф. дмн Стефка Димова

Институт по информационни и комуникационни технологии
Секция „Научни пресмятания“

Дисертацията е обсъдена и допусната до защита на разширено заседание на секция „Научни пресмятания“ на ИИКТ-БАН, състояло се на 8 септември 2011г.

Защитата на дисертацията е проведена на 20 декември 2011 г. от 15:30 часа в зала 218 на блок 25А, ИИКТ-БАН.

Дисертационният труд съдържа 135 страници, в които 18 фигури, 16 таблици и 9 страници литература, съдържаща 79 заглавия.

Обща характеристика на дисертационния труд

Обзор на изследваната област и актуалност на темата

Много от най-значимите достижения в съвременната наука и технология се дължат на напредъка в областта на компютърното моделиране. Ефективността на този сложен интердисциплинарен процес при намирането на решение на различни задачи в приложната и научна области на човешкото знание, се основава на работата и успехите в съвкупност от научни направления. Компютърното моделиране включва създаване на: а) математически модел, адекватно описващ съответния реален феномен; б) числени методи за дискретизация на диференциалните и/или интегрални уравнения; в) ефективни методи и алгоритми за решаване на получените след дискретизацията системи от линейни алгебрични уравнения; г) алгоритми за визуализация и анализ на резултатите от проведените числени експерименти; д) високопроизводителни компютърни програми, които в максимална степен използват възможностите и архитектурата на съвременните изчислителни системи. Компютърният модел дава възможност не само за икономии при скъпо струващи лабораторни и практически експерименти. В редица случаи още по-важно е моделирането на характеристиките на нови материали и технологии, както и изследването на процеси, за които измерванията и наблюденията са невъзможни.

Основни средства за дискретизация на диференциални уравнения са методът на крайните елементи и методът на крайните разлики, вж. напр. [26, 28, 3]. След тяхното прилагане, задачата се свежда до система от линейни алгебрични уравнения [1, 2]. Едно от най-важните свойства на тези системи е, че съответните матрици са разредени. Това означава, че броят на ненулевите елементи във всеки ред или стълб е ограничен от константа, която не зависи от параметъра на дискретизация на съответния метод и следователно не зависи от размерността на дискретната задача, която се увеличава с намаляването на дискретизационния параметър. Известно е, че решаването на задачи на изчислителната линейна алгебра с разредени матрици е определящо за ефективността на доминиращата част от съществуващите програми за компютърно моделиране на процеси, които се описват с диференциални уравнения [9, 2]. Това е особено важно при решаване на сложни задачи с голяма размерност. Понятието голяма размерност се променя с нарастване на производителността на изчислителната техника, но независимо от огромния прогрес в това отношение, определящи за развитието на компютърното моделиране са постиженията в областта на числените методи и алгоритмите за тяхната реализация. Резултатите представени в настоящата дисертация са в тази област.

Методът на крайните елементи (МКЕ) и методът на крайните разлики са представители на така наречените мрежови методи и при определени предположения матриците на получаваните линейни системи са с близки свойства и дори могат да съвпадат. Независимо от това, методът на крайните елементи има определени предимства по отношение на общността и алгоритмите за неговата реализация. Изследванията в дисертацията системно използват терминологията и свойствата на метода на крайните елементи.

Дискретизацията с конформни линейни крайни елементи е най-подробно изучения случай на прилагане на МКЕ, но в редица важни приложения неконформните крайни елементи имат сериозни предимства. Например, при числено моделиране на течения в силно хетерогенни порести среди, методът на крайните обеми и смесеният метод на крайните елементи притежават доказано добра точност и локална консервативност (на масата). При прилагането на смесен МКЕ, непрекъснатостта на скоростта по направление на нормалата към границата между два крайни елемента може да се наложи чрез Лагранжеви множители. В [4] Arnold и Brezzi показват, че след елиминиране на неизвестните на налягането и скоростта от алгебричната система, задачата за Лагранжевите множители с допълнението на Шур е еквивалентна на дискретизация на елиптична задача чрез метод на Гальоркин с линейни неконформни крайни елементи. По-точно, в [4] е показано, че апроксимация със смесен метод с крайни елементи на Равиар-Тома от най-нисък ред е еквивалентна на апроксимация с неконформни крайни елементи на Крозе-Равиар, при която крайно-елементното пространство е допълнено с кубични базисни функции, всяка от които има за носител един краен елемент.

Друго приложение на неконформните елементи, в частност, на елементите на Крозе-Равиар, на което искаме да обърнем внимание, е свързано с итерационни методи за решаване на задачи, дискретизирани с прекъснат метод на Гальоркин (Discontinuous Galerkin – DG). В [5], Ayuso de Dios и Зикатанов предлагат равномерно сходящи итерационни методи, които се основават на естествено разделяне на пространството на DG елементите от първи ред на директна сума от крайно-елементното пространство на Крозе-Равиар и подпространство, което съдържа функции, непрекъснати по вътрешни за областта интерфейси между елементите.

Това са някои от причините за специалния интерес към прилагане на неконформните крайни елементи за ефективно числено решаване на диференциални уравнения, което е предмет на настоящата дисертация.

Ако разгледаме елиптична гранична задача в областта $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ и за нейното числено решаване приложим мрежов числен метод, то при много общи предположения диференциалната задача се свежда до система от линейни алгебрични уравнения със симетрична и положително определена матрица A с размерност $N \times N$. Основните методи за решаване на такъв клас линейни системи най-общо се разделят на два вида – преки и итерационни. Методът на Холецки е един от най-добре известните преки методи. Предполага се, че той отчита лентовата структура или профила на матрицата при подходяща номерация на неизвестните и при определени предположения има изчислителна сложност $\mathcal{O}(N^2)$. Методът на вложените сечения (Nested Dissection), вж. напр. [9], е най-бързият измежду преките методи. В основата на този метод е рекурсивното разделяне на графа, представящ структурата на ненулевите елементи на матрицата A, а изчислителната му сложност е $\mathcal{O}(N^{3/2})$. Един от най-популярните итерационни методи е методът на спрегнатия градиент. Той има сложност, която асимптотично съвпада със сложността на най-добрия пряк метод. По тази причина е прието, че предимствата на итерационните методи за решаване на задачи с достатъчно голяма размерност са безспорни.

Итерационните методи в подпространства на Крилов са в класацията на десетте най–значими постижения в областта на алгоритмите през XX век. Методът на спрегнатия градиент и неговото обобщение, методът на спрегнатия градиент с преобуславяне, са съвременни методи от вариационен тип в подпространства на Крилов , вж. напр. [7, 9, 26]. Ефективността на метода на спрегнатия градиент с преобуславяне се определя от качествата на преобусловителя. Важна роля в развитието на методите за решаване на линейни системи играят изследванията в областта на конструирането на така наречените оптимални преобусловители, за които изчислителната сложност на метода на спрегнатия градиент с преобуславяне е $\mathcal{O}(N)$.

В съвременната теория на оптималните итерационни методи, основна роля играят методите построени върху последователност от мрежи (триангулации). Тези методи се разделят на многомрежови (multigrid), [27, 38] и многонивови (multilevel), [12, 16, 17, 41, 48, 55]. По традиция първата група се счита, че използва повече свойствата на диференциалната задача, докато при втората група конструкцията е в значителна степен алгебрична и се реализира в термините на метода на крайните елементи и съответните матрици на коравина. Историята на рекурсивните итерационни методи, използващи последователност от вложени мрежи, води началото си от работата на Р. Федоренко [33], публикувана през 1961 г. През 1987 г. П. Василевски, Р. Лазаров и С. Маргенов [48] конструират почти оптимален алгебричен многонивов метод. Решителна следваща стъпка в тази област е направена в работите на Axelsson и Василевски [16, 17], където са въведени AMLI методите. Тук за първи път са получени оптимални оценки, за които не се предполага допълнителна регулярност на решението на диференциалното уравнение. Както и в други дялове на математиката, напълно заслужено можем да говорим за българска школа в областта на оптималните алгебрични итерационни многонивови методи. Основни приноси в това направление са публикувани в работите на П. Василевски, Р. Лазаров, С. Маргенов.

Методология на изследването

Понятията изчислителна сложност и скорост на сходимост са основни в методологията на изследване в дисертацията. Получените резултати имат конструктивен характер, като всички предложени и изследвани методи имат ясна алгоритмична структура.

Методът на спрегнатия градиент с преобуславяне е в основата на съвременните итерационни методи. Неговата ефективност се определя от скоростта на сходимост и изчислителната сложност на решаването на система с преобусловителя. Спектралното число на обусловеност $\kappa(C^{-1}A)$ на преобусловената матрица е мярка за скоростта на сходимост на метода. Така например, за оптимални многонивови методи $\kappa(C^{-1}A) = \mathcal{O}(1)$ и броят на итерациите, достатъчни за получаване на решение с предварително зададена точност, е ограничен от константа, която не зависи от размерността на дискретната задача.

В случая на многонивови преобусловители, числото на обусловеност зависи от константата в усиленото неравенство на Коши-Буняковски-Шварц (КБШ). В дисертацията са представени нови оптимални многонивови методи. Използваният апарат на изследване включва конструиране на спектрално еквивалентни приближения за специални класове матрици, възникващи в процеса на многонивова факторизация и получаване на нови равномерни оценки на константата в усиленото неравенство на КБШ. Направена е програмна реализация на представените в дисертацията методи и алгоритми, проведени са числени експерименти и са анализирани получените числени резултати.

Цели на дисертационния труд

Основните цели на изследванията в дисертацията са:

- Разработване и изследване на оптимални преобусловители от класа на алгебричните многонивови методи (AMLI) за двумерни параболични задачи, дискретизирани с линейни неконформни крайни елементи на Крозе-Равиар.

- Разработване и изследване на оптимални многонивови методи за двумерни елиптични задачи в смесена форма, дискретизирани с неконформни крайни елементи.

- Създаване на съставен метод за нестационарните уравнения на Навие-Стокс, основан на оптимални многонивови преобусловители за системите, получени при устойчива локално консервативна дискретизация с неконформни крайни елементи.

Работата по дисертацията има за цел, както теоретично изследване на предложените методи, така и програмна реализация и анализ на резултатите от числени експерименти.

Списък на публикациите по дисертацията

Научни публикации в списания и периодични издания:

- P. Boyanova, S. Margenov, *Multilevel Splitting of Weighted Graph-Laplacians Arising in Non-conforming Mixed FEM Elliptic Problems*, Numerical Analysis and Its Applications, Springer LNCS **5434**, 2009, 216–223.

- P. Boyanova, S. Margenov, *Numerical Study of AMLI Methods for Weighted Graph-Laplacians*, Large-Scale Scientific Computing, Springer LNCS **5910**, 2010, 84–91.

- P. Boyanova, S. Margenov, *On Optimal AMLI Solvers for Incompressible Navier-Stokes Problems*, AIP Conference Proceedings vol. 1301, 2010, 457-467.
- P. Boyanova, S. Margenov, M. Neytcheva, *Robust AMLI Methods for Parabolic Crouzeix-Raviart FEM Systems*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 235(2) (2010), 380–390.
- P. Boyanova, S. Margenov, *On Multilevel Iterative Methods for Navier-Stokes Problems*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 40, Number 1, 2010, 51–60.

Глави в книги:

- P. Boyanova, S. Margenov, *Robust Multilevel Methods for Elliptic and Parabolic Problems*, invited chapter in: O. Axelsson, J. Karatson, Efficient preconditioning methods for elliptic partial differential equations, Bentham Science Publishers, 2011, 3–22.

В процес на рецензиране:

- P. Boyanova, I. Georgiev, S. Margenov, L. Zikatanov, *Multilevel Preconditioning of Graph-Laplacians: Polynomial Approximation of the Pivot Blocks Inverses.*

Една от представените публикации по дисертацията е в списанието "Journal of Computational and Applied Mathematics" с "импакт фактор" 1.029 за 2010 година.

Апробация на резултатите

Съществени части от дисертацията са представени на следните специализирани международни научни конференции: 4th Conference on "Numerical Analysis and Applications", Lozenetz, Bulgaria, 2008; 7th International Conference on "Large-Scale Scientific Computations", Sozopol, Bulgaria, 2009; 4th IMACS Conference on "Mathematical Modelling and Computational Methods in Applied Sciences and Engineering", Roznov pod Radhostem, Czech Republic, 2009; 7th Conference on Numerical Methods and Applications – NM&A'10, Borovets, Bulgaria, 2010; Emerging Topics in Dynamical Systems and Partial Differential Equations – DSPDEs'10, Barcelona, Spain, 2010.

Резултати от дисертацията са докладвани и в рамките на: Информационни дни по проекта Bulgarian IST Center of Competence in 21 Century (BIS-21++), Боровец, България, 2007; 3rd Annual meeting of BGSIAM'08, Sofia, Bulgaria, 2008; Workshop on "Numerical Methods and High Performance Computations", IPP–BAS, Sofia, Bulgaria, 2009.

Участие в научни проекти

- Център за върхови научни постижения "Суперкомпютърни приложения", фонд "Научни изследвания", ДО02-115/2008
- Методи, алгоритми и софтуерни средства за задачи с голяма размерност и йерархични компютърни модели, фонд "Научни изследвания", ДО02-147/2008
- Развитие на методите на механиката на непрекъснати среди чрез числени и аналитични приложения на вариационни принципи ,фонд "Научни изследвания", ДО02-338/2008
- Адаптивни и йерархични алгоритми в метода на крайните елементи, фонд "Научни изследвания", VU-MI-202/2006
- Finite element preconditioners for algebraic problems as arising in modelling of multiphase microstructures, 2009/2011, Swedish Research Council (VR)

Съдържание на дисертацията

Настоящата дисертация се състои от увод, четири глави, заключение и списък на цитираната литература. Основното съдържание е поместено на 108 страници, а изложението е придружено с фигури и таблици. Списъкът на цитираната литература съдържа 79 заглавия.

Глава 1. Въведение

Първата глава има въвеждащ характер. В нея са представени известни факти, използвани на различни етапи от изследванията в дисертацията.

В началото накратко представяме метода на крайните елементи и негови основни свойства. МКЕ е сред основните средства за числено решаване на диференциални уравнения [3, 9, 26, 29], наложило се поради елегантната математическа формулировка и широката употреба за числено решаване на важни (класове от) задачи с приложения в техническите, медицински, естествени и други науки. МКЕ е техника за избор на крайномерно подпространство $\mathcal{V}_h$, в което търсим приближено решение на диференциалната задача във вариационна форма. Най-често използваните в МКЕ подпространства съдържат функции, които са на части полиноми върху разделяне (триангулация) $\mathcal{T}_h$ на областта, наричано още крайно-елементна *мрежа*.

Когато пространството $\mathcal{V}_h$ не принадлежи на Соболевото пространство $\mathcal{V}$, за което е дефинирана вариационната задача, МКЕ се нарича *неконформен* метод, т.е., дискретизация с неконформни крайни елементи. Пример за неконформни елементи са крайните елементи на Крозе-Равиар, вж. напр., [26].

Намирането на приближено решение u_h чрез МКЕ се свежда до решаване на система линейни алгебрични уравнения с голяма размерност,

$$A\mathbf{u} = \mathbf{b},$$

където $\mathbf{u} = \{u_i\}_{i=1}^N$ е неизвестният вектор, $u_h = \sum_{i=1}^{N} u_i \phi_i$. Базисните функции $\phi_i \in \mathcal{V}_h$ имат локален носител и по конструкция във всеки ред от матрицата на системата има само не голям брой различни от нула елементи, т.е. $A \in \mathbf{R}^{N\times N}$ е *разредена* матрица. В случая на МКЕ дискретизации на елиптични задачи от втори ред, A е симетрична и положително определена.

Раздел 1.2 е посветен на итерационни методи за решаване на системи линейни уравнения с разредени матрици. Първо е представен методът на спрегнатия градиент. Важно негово свойство е, че направленията на търсене са взаимно ортогонални по отношение на енергетичното скаларно произведение. Оценка за скоростта на сходимост на този метод се дава от следната теорема.

Теорема 1.2.2. *В сила е неравенството*

$$it(\epsilon) \le \frac{1}{2}\sqrt{\kappa(A)}\ln(2/\epsilon) + 1, \tag{1}$$

където с $it(\epsilon)$ е означено най-малкото цяло положително число n, за което n-тото приближение $\mathbf{x}_{(n)}$, пресметнато чрез метода на спрегнатия градиент удовлетворява условието

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{(n)}\|_A \le \epsilon \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{(0)}\|_A, \quad \forall \mathbf{x}_{(0)} \in \mathbf{R}^N.$$

Според Теорема 1.2.2, броят итерации в метода на спрегнатия градиент, необходими за достигане на желана относителна точност, зависи от спектралното число на обусловеност на матрицата на системата. В частност, броят итерации за елиптични задачи от втори ред расте пропорционално на $\mathcal{O}(\sqrt{N})$.

С цел подобряване на сходимостта в случая на решаване на лошо обусловени системи, се прилага така наречената техника на преобуславяне. Методът на спрегнатия градиент с преобуславяне се е наложил като предпочитан итерационен метод за решаване на системи линейни алгебрични уравнения с разредени симетрични и положително определени матрици. Той се извежда, като методът на спрегнатия градиент се приложи за трансформираната (преобусловена) система $\widetilde{A}\widetilde{\mathbf{x}} = \widetilde{\mathbf{b}}$, където $\widetilde{A} = C^{-\frac{1}{2}}AC^{-\frac{1}{2}}, \widetilde{\mathbf{x}} = C^{\frac{1}{2}}\mathbf{x}$, а $\widetilde{\mathbf{b}} = C^{-\frac{1}{2}}\mathbf{b}$. В алгоритъма не е необходимо явно да се използва представянето $C = C^{\frac{1}{2}}C^{\frac{1}{2}}$ на преобусловителя (вж. напр., [37]), така че на практика се работи директно със самата матрица C. Теорема 1.2.2 може да се приложи за определяне на скоростта на сходимост и на метода на спрегнатия градиент с преобуславяне, като този път в оценката (1) участва спектралното число на обусловеност на преобусловената матрица, $\kappa = \kappa(C^{-1}A)$. От оценката на скоростта на сходимост и конструкцията на метода следва следната обща стратегия за конструиране на ефективни преобусловители (вж. напр. [7, 52]). Целта е матрицата C да удовлетворява следните две условия:

- Да съществува ефективен алгоритъм за решаване на системи с преобусловителя C, с изчислителна сложност много по-малка от сложността на решаване на системи с оригиналната матрица, т.е.,
$\mathcal{N}(C^{-1}\mathbf{x}) \ll \mathcal{N}(A^{-1}\mathbf{x})$.

- Относителното число на обусловеност на преобусловената матрица да е съществено по-малко от това на изходната матрица, т.е.,
$\kappa(C^{-1}A) \ll \kappa(A)$.

Дефиниция 1.2.1. *Казваме, че преобусловителят C е оптимален, когато $\mathcal{N}(C^{-1}\mathbf{x}) = \mathcal{O}(N)$ и $\kappa(C^{-1}A) = \mathcal{O}(1)$, където с N е означена размерността на системата.*

Така нареченият обобщен метод на спрегнатия градиент с преобуславяне позволява използването на различни (променящи се) преобусловители на различни итерации, вж. напр. [6, 10, 18, 19, 51]. Основната разлика по отношение на стандартния метод на спрегнатия градиент е, че поради по-общия вид на преобусловителя, ортогоналността на направленията на търсене не е гарантирана и трябва да се наложи експлицитно. Като резултат, обобщеният метод на спрегнатия градиент с преобуславяне е по-скъп от стандартния метод на спрегнатия градиент с преобуславяне.

В Раздел 1.3 е направено въведение в теорията на оптималните алгебрични многонивови методи. Алгебричният многонивов преобусловител (от английски: Algebraic MultiLevel Iteration method – AMLI) е оптимален преобусловител, предложен за първи път в [16, 17] за случая на елиптична задача, дискретизирана с конформни линейни крайни елементи. По-късно методът е обобщен за неконформни дискретизации, прекъснат метод на Гальоркин, предложени са и нелинейни алгоритми (вж. напр. [22, 23, 24, 34, 40, 42, 45, 46, 47, 50] и цитиранията, представени там).

Многонивовите методи представляват рекурсивно обобщение на съответните двунивови методи. Нека A е симетрична положително полуопределена матрица със следното блочно две на две представяне:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

където блокът A_{11} е неособен. В сила е следната точна факторизация:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \\ A_{21} & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & A_{11}^{-1}A_{12} \\ & I_2 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

където $S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ е *допълнението на Шур*.

Различни техники на преобуславяне се основават на апроксимиране на (някои от) блоковете в (3). Ефективността на преобусловителите, основани на блочна факторизация, силно зависи от свойствата на разделянето (2), което се характеризира с *константата в усиленото неравенство на Коши-Буняковски-Шварц* (КБШ).

Нека $W = V_1 \times V_2$ е разделяне на векторното пространство, съгласувано по размерност с блочното представяне (2), а $\mathbf{v}_i \in V_i$, $i = 1, 2$ и $W_1 = \{\mathbf{v} = [\mathbf{v}_1^T, \mathbf{0}^T]^T\}$, $W_2 = \{\mathbf{v} = [\mathbf{0}^T, \mathbf{v}_2^T]^T\}$.

Константата в усиленото неравенство на КБШ се дефинира като минималната положителна константа γ, удовлетворяваща за всеки ненулеви $\mathbf{v}_i \in V_i$, $i = 1, 2$, неравенството

$$|\mathbf{v}_1^T A_{12} \mathbf{v}_2| \leq \gamma \left\{ \mathbf{v}_1^T A_{11} \mathbf{v}_1 \;\; \mathbf{v}_2^T A_{22} \mathbf{v}_2 \right\}^{1/2}. \tag{4}$$

Следните три леми (вж. напр. [7, 32]) са основата за извеждане на теоретични оценки на константата в усиленото неравенство на КБШ.

Лема 1.3.2. *Нека A е симетрична положително полуопределена матрица, A_{11} е положително определена, а γ е най-малката константа, за която е изпълнено (4). Тогава:*

(а) $\gamma \leq 1$.

(б) $\gamma = 1$ *ако съществува* $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \in \ker(A)$ *за което* $\mathbf{v}_2 \notin \ker(A_{22})$.

(в) $\gamma < 1$ *ако за всяко* $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \in \ker(A)$ *е изпълнено* $\mathbf{v}_2 \in \ker(A_{22})$.

(г) При предположенията във (в),

$$\gamma = \sup_{\mathbf{v}_i \in V_i \setminus \ker(A_{ii}),\, i=1,2} \frac{\mathbf{v}_1{}^T A_{12} \mathbf{v}_2}{(\mathbf{v}_1{}^T A_{11} \mathbf{v}_1 \;\; \mathbf{v}_2{}^T A_{22} \mathbf{v}_2)^{1/2}}.$$

Лема 1.3.3. *Нека A е симетрична положително полуопределена матрица, изпълняваща условието (в) от Лема . Тогава*

(а)

$$\gamma^2 = \sup_{\mathbf{v}_2 \in V_2 \setminus \ker(A_{22})} \frac{\mathbf{v}_2{}^T A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2{}^T A_{22} \mathbf{v}_2}. \tag{5}$$

(б) за всяко $\mathbf{v}_2 \in V_2 \setminus \ker(A_{22})$

$$1 - \gamma^2 \leq \frac{\mathbf{v}_2{}^T S \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2^T A_{22} \mathbf{v}_2} < 1, \tag{6}$$

където лявото неравенство е точно, а дясното е точно, ако $\ker(A_{12}) \neq \{0\}$.

Нека предположим, че матрицата на системата може да се представи като

$$A = \sum_{E \in \mathcal{E}} A_E, \qquad \mathbf{v} = \sum_{E \in \mathcal{E}} \mathbf{v}_E, \tag{7}$$

където A_E са симетрични положително полуопределени локални матрици, $\mathcal{E}$ е множество от индекси, а сумирането е в смисъл на асемблиране. По естествен начин глобалното разделяне на векторното пространство определя две на две блочно представяне на локалните матрици A_E и съответните вектори $\mathbf{v}_E$,

$$A_E = \begin{bmatrix} A_{E:11} & A_{E:12} \\ A_{E:21} & A_{E:22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_E = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{E:1} \\ \mathbf{v}_{E:2} \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Лема 1.3.4. *Нека локалните матрици A_E, $E \in \mathcal{E}$, удовлетворяват условие (в) на Лема . Нека също така $V_{E:i}$, $i = 1, 2$ е естествената рестрикция на V_i, породена от локалната матрица A_E. Тогава*

$$\gamma \leq \max_{E \in \mathcal{E}} \gamma_E < 1 \tag{9}$$

където с γ_E сме означили локалната константа в усиленото неравенство на КБШ, отговаряща на A_E, т.е.,

$$\gamma_E^2 = \sup_{\mathbf{v}_{E:2} \in V_{E:2} \setminus \ker(A_{E:22})} \frac{\mathbf{v}_{E:2}^T A_{E:21} A_{E:11}^{-1} A_{E:12} \mathbf{v}_{E:2}}{\mathbf{v}_{E:2}^T A_{E:22} \mathbf{v}_{E:2}}. \tag{10}$$

Класическата теория на оптималните двунивови методи за задачи, дискретизирани с МКЕ, за първи път е представена в [11, 20], вж. също [8]. Основната задача в конструирането на двунивови преобусловители, е да се избере подходящо разделяне на матрицата на коравина, така че константата в усиленото неравенство на КБШ да е далеч от единица. Общият подход за получаване на блочно две-на-две представяне на матрицата на системата се базира на дефинирането на две вложени крайно-елементни пространства $\mathcal{V}_H \subset \mathcal{V}_h$, съответстващи на последователни равномерни сгъстявания на мрежата.

Нека $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{T}_\ell$ са триангулации, получени чрез последователно равномерно сгъстяване на дадена начална мрежа $\mathcal{T}_0$, с брой на възлите съответно $N_0 < N_1 < \ldots < N_\ell$. Ще използваме следните означения: $C^{(k)}$ е преобусловител на крайно-елементна матрица $A^{(k)}$, съответстваща на мрежата $\mathcal{T}_k$, получена след k рафинирания на $\mathcal{T}_0$, $(0 \leq k \leq \ell)$. Матриците $\widetilde{A}^{(k)}$ са йерархични матрици на ниво k, получени с помощта на двунивови йерархични трансформации дефинирани от разредени матрици $J^{(k)}$, т.е., $\widetilde{A}^{(k)} = J^{(k)} A^{(k)} (J^{(k)})^T = \begin{bmatrix} \widetilde{A}_{11}^{(k)} & \widetilde{A}_{12}^{(k)} \\ \widetilde{A}_{21}^{(k)} & \widetilde{A}_{22}^{(k)} \end{bmatrix}$
Целта е да се построи преобусловител $C^{(\ell)}$ за матрицата $A^{(\ell)} := A_h$ на най-фината мрежа.

Конструкцията на AMLI метода е рекурсивна, като $C^{(0)} := A^{(0)}$. Нека AMLI преобусловителят на ниво $k-1$ е $C^{(k-1)}$, тогава $C^{(k)}$ на ниво k се дефинира като

$$C^{(k)} := (J^{(k)})^{-1} \begin{bmatrix} C_{11}^{(k)} & 0 \\ \widetilde{A}_{21}^{(k)} & Z^{(k-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^{(k)} & (C_{11}^{(k)})^{-1} \widetilde{A}_{12}^{(k)} \\ 0 & I_2^{(k)} \end{bmatrix} (J^{(k)})^{-T}, \tag{11}$$

където разредената матрица $C_{11}^{(k)}$ е подходяща апроксимация на водещия диагонален блок $\widetilde{A}_{11}^{(k)}$. При линейният AMLI метод допълнението на Шур се апроксимира чрез

$$Z^{(k-1)} := A^{(k-1)} \left(I - P_{\beta_k}({C^{(k-1)}}^{-1} A^{(k-1)}) \right)^{-1}, \tag{12}$$

където P_{β_k} е полином от степен β_k със свойството $P_{\beta_k}(0) = 1$. Може да се покаже, че (12) е еквивалентно на

$$ {Z^{(k-1)}}^{-1} = {C^{(k-1)}}^{-1} Q_{\beta_{k-1}}(A^{(k-1)} {C^{(k-1)}}^{-1}) \tag{13}$$

където полиномът $Q_{\beta_{k-1}}$ е от степен $k-1$.

Нека константите γ_k в усиленото неравенство на КБШ, съответстващи на нивата на сгъстяване на мрежата $1 \leq k < \ell$, са равномерно ограничени от числото $\gamma < 1$, т.е. $\gamma_k \leq \gamma$. Следното достатъчно условие за оптималност на линейния AMLI метод е в сила за степента $\beta_k = \beta$ на стабилизиращия полином (вж. напр. [17, 18], както и [42]):

$$\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} < \beta < \rho, \tag{14}$$

където $\rho = \min\limits_k \dfrac{N_k}{N_{k-1}}$. Ако неравенствата (14) са изпълнени, то съществува полином P_β, така че съответният линеен AMLI метод има оптимална скорост на сходимост и оптимална изчислителна сложност.

Нека за симетричните положително определени матрици $C_{11}^{(k)}$ е изпълнено условието

$$\mathbf{v}^T \widetilde{A}_{11}^{(k)} \mathbf{v} \leq \mathbf{v}^T C_{11}^{(k)} \mathbf{v} \leq (1+\xi) \mathbf{v}^T \widetilde{A}_{11}^{(k)} \mathbf{v}, \text{ за всяко } \mathbf{v}. \tag{15}$$

Тогава, за случая $\beta = 2$, коефициентите q_0 и q_1 на полинома $Q_1(y) = q_0 + q_1 y$ с оптимални стабилизиращи свойства в AMLI W-цикъла, могат да се пресметнат по следните формули (вж. напр. [17, 35]):

$$q_0 = \frac{2}{\omega}, \quad q_1 = \frac{-1}{1-\gamma^2+\xi(1-2\omega)}, \quad \omega = \sqrt{1+\xi+\xi^2-\gamma^2} - \xi. \tag{16}$$

При конструиране на AMLI методи важна роля играят следните два аспекта:

(а) Равномерна оценка на константата в усиленото неравенство на КБШ $\gamma < 1$, която определя качеството на двунивовите разделяния по нива и е необходима за конструиране на стабилизиращия полином;

(б) Избор на подходящи преобусловители $C_{11}^{(k)}$ за водещите диагонални блокове $\widetilde{A}_{11}^{(k)}$, който влияе както на относителното число на обусловеност, така и на общата изчислителна сложност.

В [17] е показано, че относителното число на обусловеност на AMLI метода удовлетворява оценката:

$$\kappa({C^{(l)}}^{-1}A^{(l)}) \approx (1+\xi)/(1-\gamma^2). \tag{17}$$

Освен с помощта на матричен полином, стабилизация може да бъде постигната и чрез прилагане на определен брой вътрешни итерации. За разлика от стандартния линеен AMLI, полученият по този начин метод не включва необходимостта от определяне на параметри, но води до нелинеен алгоритъм с променливо преобуславяне. Разглежданият в дисертацията нелинеен AMLI алгоритъм (вж. също [19, 15, 54]), известен като NLAMLI, е представен, например, в [42, 40].

Глава 2. Многонивови методи за линейни параболични задачи

Разглеждаме параболичната задача

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial}{\partial t}u(\mathbf{x},t) - \nabla\cdot(\mathbf{a}(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x},t)) & = & f(\mathbf{x},t) \quad (\mathbf{x},t)\in\Omega\times[0,T], \\ u(\mathbf{x},0) & = & u_0(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x}\in\Omega, \\ u(\mathbf{x},t)=0 \quad \mathbf{x}\in\Gamma_D, & & (\mathbf{a}(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x},t))\cdot\mathbf{n}=0 \quad \mathbf{x}\in\Gamma_N, \end{array} \tag{18}$$

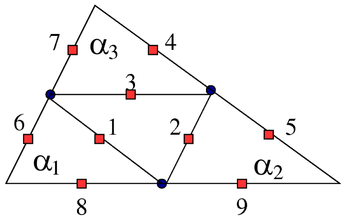
където $\Omega \in \mathbf{R}^2$ е многоъгълна област, $f \in L^2(\Omega)$, $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ е ограничена, симетрична положително определена матрица с на части гладки функции $a_{ij}(\mathbf{x})$ върху $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

След дискретизация чрез МКЕ и θ-метод, на всяка стъпка по времето $t_n \in [0,T], t_0 = 0, t_n = t_{n-1}+\Delta t$ търсим приближени решения $\mathbf{u}^n$ на дискретизираната параболична задача (18) като решения на линейни системи във вида:

$$(M + \Delta t(1-\theta)K)\,\mathbf{u}^n = \mathbf{g}^n, \tag{19}$$

където дясната част зависи от приближеното решение, пресметнато на предходна стъпка по времето. В структурата на матрицата на системата на дискретната параболична задача участват матрица на коравина K и матрица на масата M. Предложените в дисертацията многонивови методи за решаване на системи от този вид, получени при дискретизация с крайни елементи на Крозе-Равиар, се основават на така наречените “differences and aggregates” – DA (“разлики и агрегати”) и “first reduce” – FR (“първоначално изключване”) техники за двунивови йерархични разделяния за елиптични задачи. Тези техники са представени за първи път в [23] и [24], а по-късно са доразвити в [43].

В Раздел 2.4 обобщаваме йерархичното DA разделяне за случая на многонивово преобуславяне на параболични задачи. При неконформните крайни елементи на Крозе-Равиар степените на свобода се асоциират със средите на страните на крайните елементи. По построение, крайно-елементните пространства, съответстващи на последователност от вложени триангулации $\mathcal{T}_\ell, 1 \le k \le \ell$,



Фигура 1: Макроелемент E, крайни елементи на Крозе-Равиар

получени чрез равномерно сгъстяване, не са вложени. Йерархичните трансформационни матрици $J_{DA}^{(k)}$ дефинираме на макроелементно ниво, като макроелементът се дефинира като съвкупността от триъгълните крайни елементи, получени при равномерно рафиниране на елемент от грубата мрежа, вж. Фигура 1.

Нека с $\{M_E^{(k)}\}_{E\in\mathcal{T}_k}$ и $\{K_E^{(k)}\}_{E\in\mathcal{T}_k}$ означим макроелементните матрици на маса и коравина, съответстващи на дискретизация на задачата върху мрежата $\mathcal{T}_k$ на ниво на сгъстяване k, а глобалните матрици се асемблират като

$$M^{(k)} = \sum_{E\in\mathcal{T}_k} M_E^{(k)}, \quad K^{(k)} = \sum_{E\in\mathcal{T}_k} K_E^{(k)}, \quad A^{(k)} = M^{(k)} + \Delta t(1-\theta)K^{(k)}.$$

За даден макроелемент $E \in \mathcal{T}_k$ с номерация на възлите от рафинираната мрежа от 1 до 9, както е показано на Фигура 1, локалната трансформационна матрица $J_{DA;E}^{(k)}$ за DA метода се дефинира като:

$$J_{DA;E}^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & -1 & & & & \\ & & & & & 1 & -1 & & \\ & & & & & & & 1 & -1 \\ 1 & & & 1 & 1 & & & & \\ & 1 & & & & 1 & 1 & & \\ & & 1 & & & & & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Йерархичната матрица на масата има вида

$$\widehat{M}^{(k)} = J_{DA}^{(k)} M^{(k)} (J_{DA}^{(k)})^T = \sum_{E\in\mathcal{T}_k} J_{DA;E}^{(k)} M_E^{(k)} (J_{DA;E}^{(k)})^T = \begin{bmatrix} \widehat{M}_{11}^{(k)} & \widehat{M}_{12}^{(k)} \\ \widehat{M}_{21}^{(k)} & \widehat{M}_{22}^{(k)} \end{bmatrix}, \tag{21}$$

където $\widehat{M}_{22}^{(k)}$ се асоциира с неизвестните от по-грубата мрежа. С помощта на Лема 1.3.3 и Лема 1.3.4, в дисертацията показваме следната оценка за константата в усиленото неравенство на КБШ за DA разделяне за глобалната матрица на масата

$$\gamma_M^2 \le \frac{1}{2}. \tag{22}$$

В [23] е показана оценката $\gamma_K^2 \le \frac{3}{4}$ за константата в усиленото неравенство на КБШ за DA разделяне за глобалната матрица на коравина. С помощта на тези оценки получаваме следните резултати за двунивовото DA разделяне за матрицата на дискретната параболична задача,

$$\widehat{A}^{(k)} = J_{DA}^{(k)} A^{(k)} (J_{DA}^{(k)})^T = \begin{bmatrix} \widehat{A}_{11}^{(k)} & \widehat{A}_{12}^{(k)} \\ \widehat{A}_{21}^{(k)} & \widehat{A}_{22}^{(k)} \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Теорема 2.4.1. *При прилагане на DA трансформация, за разделянето (23) са в сила неравенствата:*

$$\frac{1}{4}(M^{(k-1)} + \Delta t(1-\theta)\, 4K^{(k-1)}) \le \widehat{S}_A^{(k)} \le (M^{(k-1)} + \Delta t(1-\theta)\, 4K^{(k-1)}),$$

където $\widehat{S}_A^{(k)} = \widehat{A}_{22}^{(k)} - \widehat{A}_{21}^{(k)} \widehat{A}_{11}^{(k)^{-1}} \widehat{A}_{12}^{(k)}$ *е допълнение на Шур на йерархичната матрица* $\widehat{A}^{(k)}$*. Този резултат е равномерен по отношение на скокове на коефициенти и мрежова и коефициентна анизотропия.*

Следствие 2.4.1. *Следното спектрално отношение е в сила, равномерно относно скокове на коефициенти, мрежова и коефициентна анизотропия:*

$$\frac{1}{2}A^{(k-1)} \le \widehat{S}_A^{(k)} \le 4A^{(k-1)}.$$

Представеният анализ показва два възможни начина за конструиране на AMLI преобусловител. При първия подход текущото допълнение на Шур $\widehat{S}_A^{(k)}$ се апроксимира чрез модифицираната матрица $\overline{A}^{(k-1)} = M^{(k-1)} + 4^{\ell-k+1}\Delta t(1-\theta)K^{(k-1)}$. В този случай, при използване на полиномиална стабилизация, линейният AMLI преобусловител $C^{(k)}$, вж. (11), се дефинира посредством стабилизиращ полином във вида

$$Z^{(k-1)} = \overline{A}^{(k-1)} \left(I - P_{\beta_k}^k (C^{(k-1)^{-1}} \overline{A}^{(k-1)}) \right)^{-1}.$$

При втория възможен подход директно се използва матрицата на системата $A^{(k-1)}$ и допълнението на Шур се приближава чрез

$$Z^{(k-1)} = A^{(k-1)} \left(I - P_{\beta_k}^k (C^{(k-1)^{-1}} A^{(k-1)}) \right)^{-1}.$$

Раздел 2.5 е посветен на обобщение и сравнение на робастни преобусловители за параболични задачи, дискретизирани с помощта на конформни и неконформни крайни елементи. Разглежданите AMLI методи се характеризират от константата в усиленото неравенство на КБШ за избраното йерархично разделяне. За целите на сравнението разглеждаме системна матрица в следния (скалиран) вид

$$A = \zeta M + K = \sum_{E \in \mathcal{T}} A_E = \sum_{E \in \mathcal{T}} (\zeta M_E + K_E) \tag{24}$$

където $\zeta > 0$ е параметър, съответстващ на избора на параметрите Δt и θ при дискретизацията по времето.

(i) Неконформни крайни елементи на Крозе-Равиар, DA разделяне:
За локалните (макроелементни) константи на КБШ за йерархичните матрица на коравина $\widehat{K}_E = J_{DA;E} K_E (J_{DA;E})^T$ и матрица на маса $\widehat{M}_E = J_{DA;E} M_E (J_{DA;E})^T$ в случая на неконформни дискретизации с крайни елементи на Крозе-Равиар са в сила оценките

$$\gamma^2_{K;E} \leq \frac{3}{4}, \quad \gamma^2_{M;E} = \frac{1}{2}.$$

Показваме, че при разглежданата йерархична трансформация, е в сила $\gamma_{A;E} \leq \max\{\gamma_{M;E}, \gamma_{K;E}\}$, където $\widehat{A}_E = J_{DA;E} A_E (J_{DA;E})^T = \zeta \widehat{M}_E + \widehat{K}_E$ е локалната макроелементна матрица. Тогава, с помощта на Лема 1.3.4, получаваме равномерната относно мрежова и коефициентна анизотропия оценка

$$\gamma^2_A \leq \frac{3}{4} \tag{25}$$

за константата в усиленото неравенство на КБШ за DA разделяне на матрицата (24) при дискретизация с неконформни крайни елементи.

(ii) Неконформни крайни елементи на Крозе-Равиар, FR разделяне:
В този случай са в сила следните равномерни оценки за локалните константи на КБШ за макроелементните матрици на маса и на коравина,

$$\gamma^2_{M;E} = 0, \qquad \gamma^2_{K;E} < \frac{3}{4}.$$

(iii) Конформни крайни елементи на Курант:

Следните оценки са в сила за локалните константи на КБШ за случая на двунивово разделяне на матриците на коравина и маса при дискретизация с линейни конформни крайни елементи, вж. напр. [49].

$$\gamma^2_{K;E} \leq \frac{3}{4}, \quad \gamma^2_{M;E} = \frac{9}{10}.$$

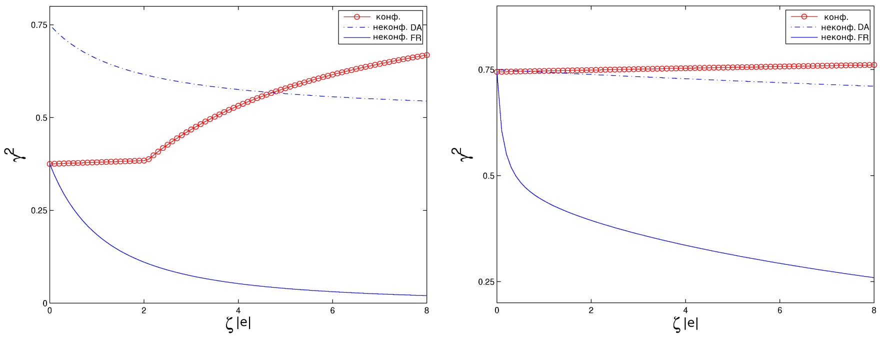
В сила е оценката $\gamma^2_A \leq \gamma^2_{A;E} \leq \max\left\{\gamma^2_{K;E}, \gamma^2_{M;E}\right\}$, от където

$$\gamma^2_A \leq \frac{9}{10}. \tag{26}$$

Оценката е равномерна относно мрежова и коефициентна анизотропия.

Достатъчното условие за оптималност на AMLI метода (14) не е изпълнено, ако $\gamma^2 > \frac{8}{9}$. Както се вижда от оценката (26), при двунивово разделяне в случая на конформни крайни елементи, това може да се случи за определени стойности на коефициента ζ в (24), който в общия случай е пропорционален на $\dfrac{1}{\Delta t}$.

В случая на DA разделяне, условието за оптималност (14) е удовлетворено за степен на стабилизиращия полином $\beta = 3$. Числените експерименти, включени



(а) $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (60^o, 60^o, 60^o)$ (б) $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (6^o, 6^o, 168^o)$

Фигура 2: Константата на КБШ за $A_E = \zeta M_E + K_E$ като функция на произведението на параметъра ζ и лицето на крайния елемент $|e|$

в Раздел 2.6, показват, че стабилизация може да се постигне и за $\beta = 2$, както при DA, така и при FR разделяне. Едно възможно обяснение за тези резултати е, че реалната стойност на γ_A за съставната матрица е по-малка. т.е. оценката (25) не се достига.

Фигура 2 представя числено изследване на поведението на константата в усиленото неравенство на КБШ за матрицата $A_E = \zeta M_E + K_E$ като функция на произведението на параметъра ζ и лицето на крайния елемент $|e|$ от една страна, и мрежовата анизотропия от друга страна. Означаваме с $\gamma^{CR}_{DA;E}$, $\gamma^{CR}_{FR;E}$ и γ^C_E макроелементните константи на КБШ, съответстващи на разделянията в случаите (i), (ii) и (iii).

Нека припомним, че мрежовата анизотропия се описва посредством ъглите $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ на триъгълните крайни елементи. В дисертацията са разгледани няколко случая на избор на тези ъгли, а на Фигура 2 са изобразени графиките на $\gamma^2 = \{(\gamma^C_E)^2, (\gamma^{CR}_{DA;E})^2, (\gamma^{CR}_{FR;E})^2\}$ като функции на $\zeta|e|$ за два избора на $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

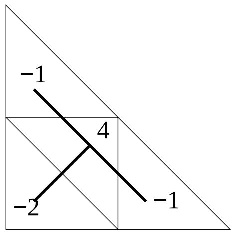
Константата $\gamma^{CR}_{FR;E}$ в усиленото неравенство на КБШ за FR разделяне е най-малката във всички разглеждани в дисертацията случаи. При сравнение на γ^C_E и $\gamma^{CR}_{DA;E}$ се вижда, че константата на КБШ за конформни елементи има по-добро поведение за малки стойности на параметъра $\zeta|e|$ и случаи на по-малка мрежова анизотропия. Общо наблюдение е, че предимствата на неконформните крайни елементи са добре изразени в случая на най-силна мрежова анизотропия.

В Раздел 2.6 дефинираме две задачи, чрез които числено изследваме поведението на предложените многонивови преобуслoвители за параболични задачи. Първата задача цели да илюстрира въздействието на мрежовата анизотропия върху сходимостта на итерационните методи за решаване на разглежданите системи, а втората демонстрира поведението на многонивовите методи при решаване на нестационарна задача с прекъснато начално условие.

В числените експерименти разглеждаме AMLI преобусловител без стабилизация (V-цикъл) и нелинеен AMLI (NLAMLI) с брой вътрешни итерации с обобщен метод на спрегнатия градиент с преобуславяне $\beta_k = 2$ и 3 на всяко ниво k (W-цикъл от степен 2 и 3). Използваме нелинейния AMLI метод поради следните съображения. От една страна не разполагаме с оценка на константата в усиленото неравенство на КБШ за случая на FR разделяне на матрицата на системата за параболична задача. Известно е обаче (вж. напр. [43]), че за елиптични задачи FR подходът притежава по-добра сходимост от DA метода, което ни дава основание да очакваме подобно поведение и за случая на параболични задачи. Също така, трябва да се вземе под внимание, че FR преобусловителите подобряват свойствата си при увеличаване на броя на нивата в AMLI метода. Въз основа на Теорема 2.4.1, DA преобусловителят притежава гарантирана оптимална скорост на сходимост при използване на стабилизиращ полином от трета степен, но в проведените експерименти разглеждаме също така и стабилизация само с две вътрешни итерации. Ето защо, използването на саморегулиращия се нелинеен AMLI метод с адаптивно преобулславяне по нива, който да позволи усвояването на пълния потенциал на йерархичното разделяне, е за предпочитане. Системите с водещите диагонални блокове се решават приближено чрез вътрешни итерации на метода на спрегнатия градиент с адитивен проеобусловител, представен в Раздел 2.3.

Мрежовата анизотропия, породена от формата на триъгълните елементи, води до допълнителна лоша обусловеност на матрицата на коравина, което влияе върху сходимостта на V-цикъла за системи с K. В съответствие с теоретичните оценки, при използване на стабилизация в двата варианта на W-цикъл, броят на итерациите не се влияе съществено от "лошата" мрежа. Матрицата на масата за крайни елементи на Крозе-Равиар е диагонална, поради което матрицата на системата за дискретизираната параболична задача е по-силно диагонално доминираща от матрицата на системата в случай на елиптична задача. Сравнение на резултатите ясно показва влиянието на този ефект. W-циклите за параболичната система се стабилизират за по-малък брой итерации. V-цикълът за този случай също има по-добри свойства. Сравнението на DA и FR преобусловителите показва, че FR методът има същата или по-добра скорост на сходимост спрямо тази на DA метода за параболичната задача. Случаят на W-цикъл с три вътрешни итерации, както и този с две, показват оптимално поведение и за двата разглеждани варианта на йерархично разделяне. Резултатите потвърждават предположението, че FR преобусловителят е оптимален и за параболичната задача.

Резултатите, получени при решаване на нестационарна задача с прекъснато начално условие, съответстват на свойствата на физичното явление. Ясно се наблюдава типичното за еволюционни уравнения изглаждане на началното условие.



Фигура 3: Четириточков шаблон на допълнението на Шур за налягането

Глава 3. Многонивови методи за граф-лапласиани с тегла

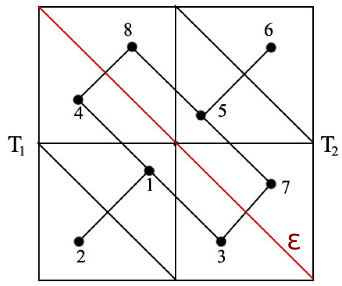
В Раздел 3.1 е представена постановка на елиптична задача в смесена форма за векторната функция на скоростта и скаларната функция на налягането. Смесеният метод на крайните елементи води до задача със седлова точка. Матрицата на дискретната система от линейни алгебрични уравнения е особена и директното приложение на метод на спрегнатия градиент не е възможно. Разглеждаме дискретизация с комбинация от неконформни крайни елементи на Крозе-Равиар и на части константи. В този случай неизвестните на скоростите могат да бъдат изключени точно и задачата се свежда до задача за решаване на система за налягането.

Видът на матрицата на системата за налягането е изведен в Раздел 3.2, като тя има структура на граф-лапласиан с тегла. В следващите раздели разглеждаме случая на вложени мрежи $\mathcal{T}_k, k = 0, \ldots, \ell$ от равнобедрени правоъгълни триъгълници, като всяка по-фина мрежа е получена чрез равномерно сгъстяване на предходната. За всяка такава триангулация, матрицата на системата $A^{(k)}, k = 1, \ldots, \ell$ съответства на Т-образния четириточков шаблон от Фигура 3.

В Раздел 3.3 предлагаме семейство йерархични разделяния за матрицата $A^{(k)}$, основани на представянето ѝ като сума от специално въведени локални макроелеметни матрици $A_\varepsilon^{(k)}, \varepsilon \in \mathcal{E}$, асоциирани със страни на елементи от грубата мрежа. Следвайки номерацията от Фигура 4, въвеждаме локална макроелементна матрица $A_\varepsilon^{(k)}$, съответстваща на хипотенуза, по следния начин

$$A_\varepsilon^{(k)} = A_{\varepsilon;H}^{(k)} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} t+1 & -2t & \frac{t-1}{2} & \frac{t-1}{2} & & & & \\ -2t & 2t & & & & & & \\ \frac{t-1}{2} & & \frac{5-t}{2} & & & & -2 & \\ \frac{t-1}{2} & & & \frac{5-t}{2} & & & & -2 \\ \hline & & & & t+1 & -2t & \frac{t-1}{2} & \frac{t-1}{2} \\ & & & & -2t & 2t & & \\ & & -2 & & \frac{t-1}{2} & & \frac{5-t}{2} & \\ & & & -2 & \frac{t-1}{2} & & & \frac{5-t}{2} \end{array}\right]. \tag{27}$$

Локалните матрици, съответстващи на катет, дефинираме по подобен начин.



Фигура 4: Макроелемент от два триъгълника с обща хипотенуза

Основна идея в тази конструкция е компонентите на глобалната матрица $A^{(k)}$, съответстващи на даден елемент $e \in \mathcal{T}_k$, да бъдат "разпределени"между три локални матрици, съответстващи на трите страни на елемента $E \in \mathcal{T}_{k-1}$ от грубата мрежа, за който $e \subset E$. Това разпределение става посредством тегловия параметър $t \in (0,1)$. Дефинираме локалната трансформационна матрица $J_\varepsilon^{(k)}$ по следния начин

$$J_\varepsilon^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & s & q & q & & & & \\ 1 & q & s & q & & & & \\ 1 & q & q & s & & & & \\ & & & & 1 & s & q & q \\ & & & & 1 & q & s & q \\ & & & & 1 & q & q & s \\ r & r & r & r & & & & \\ & & & & r & r & r & r \end{bmatrix}, \tag{28}$$

където s и q са параметри на разделянето, а r е скалиращ параметър. Глобалната йерархична матрица приема блочното две-на-две разделяне $\widetilde{A}^{(k)} = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}} J_\varepsilon^{(k)} A_\varepsilon^{(k)} J_\varepsilon^{(k)T} = \begin{bmatrix} \widetilde{A}_{11}^{(k)} & \widetilde{A}_{12}^{(k)} \\ \widetilde{A}_{21}^{(k)} & \widetilde{A}_{22}^{(k)} \end{bmatrix}$.

Лема 3.3.1. *За йерархичния базис, дефиниран чрез трансформацията (28), е изпълнено равенството*

$$\widetilde{A}_{22}^{(k)} = A^{(k-1)} \quad \text{тогава и само тогава, когато} \quad r = \sqrt{2}/2.$$

Лема 3.3.1 показва, че във втория диагонален блок на предложеното йерархичното разделяне се възстановява граф-лапласианът на грубата мрежа, което позволява рекурсивно многонивово обобщение за последователност от вложени триангулации.

Варирайки параметрите (s, q, t) получаваме семейство йерархични разделяния. По аналогия с анализа в [47], първо разглеждаме комбинацията $s = 1$,

$q = -0.5$, $t = 0.5$. Като използваме Лема 1.3.4 в този случай получаваме оценката

$$\gamma^2 \leq 0.73 \tag{29}$$

за константата в усиленото неравенство на КБШ.

Като следваща стъпка модифицираме параметрите на йерархичната трансформация с цел подобряване на оценката за локалните константи в усиленото неравенство на КБШ. Варираме стойностите на q и t за $s = 1$. Направеният анализ показва, че за $q = -0.1$ и $t = 0.75$ се достига локален минимум и

$$\gamma^2 \leq 0.58. \tag{30}$$

И в двата разгледани случая на избор на параметрите на разделянето (s, q), достатъчното условие за оптималност (14) на AMLI метода е изпълнено за стабилизация с полином от втора степен.

В Раздел 3.4 е предложен и изследван преобусловител за водещия диагонален блок в дефинираното йерархично разделяне на граф-лапласиани. Конструкцията използва полиномиална апроксимация на обратна матрица, като запазва линейността в метода на спрегнатия градиент с преобуславяне.

Нека разгледаме симетричната положително определена матрица H с размерност $n \times n$. Множеството от двойките ѝ собствено число - собствен вектор означаваме с $\{\lambda_i, \widehat{\mathbf{v}}_i\}_{i=1}^n$, $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$. Целта е да построим полиномиална апроксимация (преобусловител) C^{-1} на H^{-1} (т.е. преобусловител C на H), така че $C^{-1} = P_\nu(H)$, където $P_\nu \in \mathcal{P}_\nu$ е полином от степен ν, а относителното число на обусловеност $\kappa(C^{-1}H)$ да е близо до единица.

Теорема 3.4.1. *Нека $P_\nu(x) \in \mathcal{P}_\nu$ и неравенствата $0 < \underline{m} \leq P_\nu(x)x \leq \overline{m}$ са в сила за всяко x в даден интервал $\mathcal{S}$, за който $[\lambda_1, \lambda_n] \subset \mathcal{S}$. Тогава*

$$\underline{m}\mathbf{v}^T\mathbf{v} \leq \mathbf{v}^T P_\nu(H) H \mathbf{v} \leq \overline{m}\mathbf{v}^T\mathbf{v}, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Целта е да получим матрица, която е близка до обратната на H, $P_\nu(H)H \sim I$, т.е. $P_\nu(x)x \sim 1$ за всяко $x \in \mathcal{S}$. Нека предположим, че $|P_\nu(x) - 1/x| < \epsilon$ за всяко $x \in \mathcal{S} = [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$, където $\lambda_{\min} \leq \lambda_i \leq \lambda_{\max}$, $i = 1, \ldots, n$. Тогава

$$1 - \epsilon\lambda_{\max} < P_\nu(x)x < 1 + \epsilon\lambda_{\max}. \tag{31}$$

В общия случай, ако ϵ е достатъчно малко, или еквивалентно, ако степента ν на полинома е достатъчно голяма, то $P_\nu(x)x > 0$ за всяко $x \in \mathcal{S}$, $P_\nu(H)H$ е симетрична и положително определена и

$$\kappa(P_\nu(H)H) < \frac{1 + \epsilon\lambda_{\max}}{1 - \epsilon\lambda_{\max}}.$$

Подходът, който разглеждаме в дисертацията, е да изберем $P_\nu(x)$ да бъде полинома на най-добро приближение на x^{-1} в L_∞ норма в крайния интервал $[\lambda_{min}, \lambda_{max}]$, т.е.

$$\left\| \frac{1}{x} - P_\nu \right\|_{\infty,[\lambda_{\min},\lambda_{\max}]} = \min_{P \in \mathcal{P}_\nu} \left\| \frac{1}{x} - P \right\|_{\infty,[\lambda_{\min},\lambda_{\max}]} = E(\nu).$$

Грешката на най-доброто полиномиално приближение $E(\nu)$ е

$$E(\nu) = \frac{8\sigma\theta^{-\nu}}{(\theta-\theta^{-1})^2},\ \sigma = \frac{1}{\lambda_{\max}-\lambda_{\min}},\ a = \frac{\lambda_{\max}+\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}-\lambda_{\min}},\ \theta = a+\sqrt{a^2-1},$$

а за полинома $P_\nu(x)$ съществува тричленна рекурентна формула (вж. [44]), която използваме за пресмятането на $P_\nu(H)$.

Водещият диагонален блок $\widetilde{A}_{11}^{(k)} = \sum_{\varepsilon\in\mathcal{E}} \widetilde{A}_{\varepsilon:11}^{(k)}$ е симетрична и положително определена матрица и описаната по-горе техника за полиномиална апроксимация на обратната ѝ матрица е директно приложима. Минималната и максимална собствени стойности не зависят от размерността на задачата, ето защо е достатъчно да намерим оценки $\lambda_{\min}$ и $\lambda_{\max}$ за собствените стойности на водещия диагонален блок за сравнително груба мрежа и да използваме един и същ интервал $\mathcal{S}$, а от там и един и същ полином $P_\nu(x)$, за всяко $k = 1,\ldots,\ell$.

Нека изберем $C_{11}^{(k)} = (1+E(\nu)\lambda_{\max})(P_\nu(\widetilde{A}_{11}^{(k)}))^{-1}$ за преобусловител на водещия диагонален блок $\widetilde{A}_{11}^{(k)}$. Тогава, от неравенствата (31) и Теорема 3.4.1 следва, че за константата ξ в (15) е изпълнено равенството

$$\xi = (1+E(\nu)\lambda_{\max})/(1-E(\nu)\lambda_{\max}) - 1. \tag{32}$$

В Раздел 3.5 е проведен системен числен анализ на предложените техники за многонивово преобуславяне на граф-лапласиани с тегла. Последователно са изследвани свойствата на йерархичното разделяне и полиномиалната апроксимация на водещите диагонални блокове.

Конструираният AMLI преобусловител е рекурсивно обобщение на двунивов метод за двунивово разделяне, което има еднакви свойства на всяко ниво. Ето защо в Раздел 3.5.1 най-напред разглеждаме поведението на двунивов мултипликативен преобусловител. Разглеждаме два случая на стойности на параметрите на йерархичното разделяне, $(s=1,\ q=-0.5)$ и $(s=1,\ q=-0.1)$. И за двете параметрични комбинации броят на итерациите в метода на спрегнатия градиент с преобуславяне не зависи от размерността на задачата, а само от желаната относителна грешка ϵ, като зависимостта е в съответствие с Теорема 1.2.2.

Като следваща стъпка разглеждаме AMLI преобусловител със стабилизиращ полином от втора степен. За случая $\beta = 2$, коефициентите на полинома можем да пресметнем чрез формулите (16), в които участват оценка γ_{est} на константата γ в усиленото неравенство на КБШ, $\gamma \le \gamma_{est}$, и константата ξ от неравенствата (15). Разглеждаме AMLI метод, при който системите с водещите диагонални блокове се решават точно, и такъв, при който водещите блокове са преобусловени чрез техни скалирани диагонални части. И в двата случая се наблюдава стабилизация на броя итерации по отношение на размерността на задачата. Относителното число на обусловеност на AMLI преобусловителя се увеличава, когато системите с водещия диагонален блок не се решават точно, което води до повече итерации в метода на спрегнатия градиент.

Анализът на числените експерименти дават основание да се предположи, че бихме могли да подобрим метода за случая ($p = 1, q = -0.5$), като използваме информация от направените тестове. Поведението на двунивовия преобусловител е добър практически индикатор за свойствата на дефинираното йерархично разделяне, а числените тестове показват, че методът на спрегнатия градиент с преобуславяне се държи по много подобен начин за двата случая на параметри на разделянето. Това предполага, че и съответните разделяния имат близки свойства. Качествата на стабилизиращия полином се влияят от точността на оценката γ_{est}^2, с която се пресмятат коефициентите (16) и има основание да се допусне, че изведената оценка $\gamma_{est}^2 = 0.73$ е песимистична за случая ($p = 1, q = -0.5$) и вместо нея можем да използваме получената за случая ($p = 1, q = -0.1$), т.е. $\gamma_{est}^2 = 0.58$. Методът на спрегнатия градиент с многонивов преобусловител с коефициенти на стабилизиращия полином, които пресмятаме като използваме тази по-добра оценка, се схожда и AMLI методът се стабилизира за по-малко итерации, като броят им съответства на оценката в Теорема 1.2.2.

Числените експерименти, представени в Раздел 3.5.2, имат за цел да илюстрират свойствата на предложения полиномиален преобусловител за водещите диагонални блокове в йерархичното разделяне за граф-лапласиани. Разглеждаме случая $s = 1, q = -0.1, \gamma_{est}^2 = 0.58$. Предложената в тази глава конструкция за разглежданите системи гарантира, че матриците $C_{11}^{(k)}$ са симетрични положително определени при степени на полинома $\nu \geq 2$. Сходимостта при $\nu = 3$ и $\nu = 4$ е доста по-добра от тази за $\nu = 2$ и методът се стабилизира по-рано. Това е очакван резултат, тъй като $E(\nu)$ и съответната стойност за ξ са значително по-големи при $\nu = 2$. Важно е да отбележим, че ξ е мярка за това колко добре $C_{11}^{(k)}$ приближава $\widetilde{A}_{11}^{(k)}$ и също така влияе в значителна степен на стабилизиращите свойства на полинома $Q_{\beta-1}$. Преобуславител с диагонална апроксимация на $\widetilde{A}_{11}^{(k)}$, за който $\xi = 6.2$, води до по-малък брой итерации от преобусловител с полиномиална апроксимация от степен $\nu = 2$, където $\xi = 9.166$. От друга страна, когато блокът $\widetilde{A}_{11}^{(k)}$ е преобусловен с матричен полином от степен $\nu = 3$ или $\nu = 4$, ξ е значително по-малко, съответно и итерациите намаляват, като броят им не е много по-голям от този за случая на точно решаване на системите с водещия диагонален блок.

Полиномът P_ν в апроксимацията за водещите диагонални блокове в предложения AMLI преобусловител е постоянен, като по този начин се осигурява линейността на процеса и ортогоналността на направленията на търсене в метода на спрегнатия градиент с преобуславяне се запазва. Правим също така сравнение с многонивов преобусловител, при който вместо полиномиалната апроксимация за намиране на приближено решение на системите с водещите диагонални блокове, използваме няколко вътрешни итерации с метода на спрегнатия градиент. Подобни експерименти имат няколко специфични особености. Методът на спрегнатия градиент се адаптира автоматично, за да намери найдоброто приближено решение за дадена дясна част, но това означава, че действието на матричния полином, който съответства на определен брой вътрешни итерации, се променя на всяка външна итерация на метода на спрегнатия градиент с преобуславяне. По този начин линейността на AMLI метода се разваля. В такъв случай вместо метод на спрегнатия градиент с преобуславяне се налага да се използва обобщен метод на спрегнатия градиент с преобуславяне, при който допълнително наложената ортогоналност се постига на цената на повече използвани компютърни ресурси. Анализът на проведените експерименти със стандартен метод на спрегнатия градиент с преобусловители с описаната по-горе конструкция с вътрешни итерации чрез метода на спрегнатия градиент не водят до добри резултати, не се наблюдава стабилизация, а в някои случаи процесът не се схожда.

Глава 4. Многонивови методи за уравненията на Навие-Стокс

Глава 4 е посветена на конструиране на ефективни алгоритми за намиране на числено решение на нестационарната система от уравнения на Навие-Стокс, описващи течение на несвиваем флуид. Резултатите, представени тук, демонстрират приложение на предложените в Глава 2 и Глава 3 многонивови методи в една от важните приложни области на изчислителната математика и механика, а именно, численото изследване на динамика на флуидите.

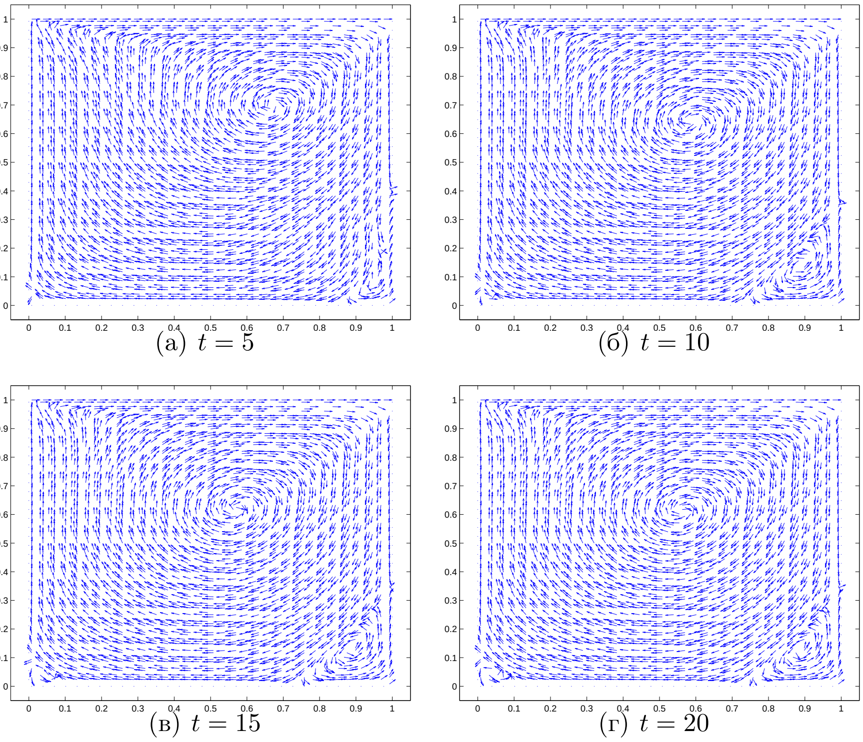
В дисертацията разглеждаме техника за числено решаване на нестационарната система от уравнения на Навие-Стокс, която използва така наречения проекционен подход, при който вместо свързана система, на всяка стъпка по времето се разглеждат отделни задачи за скоростите и налягането. Проекционните методи за първи път са предложени от Temam и Chorin, вж [53] и [30]. Подходът се основава на представянето на L^2 - векторни полета като директна сума на бездивергентни полета и полета с нулева ротация (вж. напр. [36]).

В дисертацията за апроксимация на неизвестните на скоростите $\mathbf{u}$ използваме неконформни линейни крайни елементи на Крозе-Равиар. Едно важно предимството на тези елементи е, че дивергенцията на полето на скоростите е нула във вътрешността на всеки елемент. Неизвестното налягане p търсим в пространството от на части константни функции. Този избор води до устойчива, локално консервативна дискретизация, вж. напр. [31] и [21].

Проекционната схема, представена в Раздел 4.1, разделя нелинейната система на Навие-Стокс на две линейни подзадачи. В Раздел 4.2 разглеждаме подробно структурата на системите, възникващи на конвективно-дифузионната и проекционната стъпки в проекционния метод. Предлагаме съставен многонивов метод, при който за всяка от тях се прилага оптимално многонивово преобуславяне, което води до обща оптимална ефективност на метода.

Конвективно-дифузионна стъпка:
На конвективно-дифузионната стъпка в проекционния метод трябва да се решат две независими задачи от параболичен тип за компонентите на скоростта. Структурата на матриците на системите на двете задачи е една и съща (с точ-

Фигура 5: Векторно поле на скоростите при число на Рейнолдс $Re = 400$



(а) $t = 5$ (б) $t = 10$

(в) $t = 15$ (г) $t = 20$

ност до допълнително наложени гранични условия) и има следния вид

$$A = \frac{1}{\Delta t} M + \frac{1}{Re} K.$$

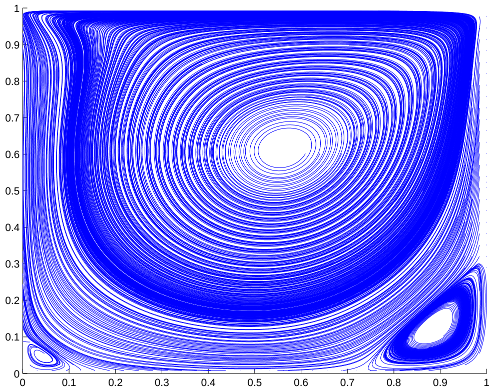
В дисертацията предлагаме за решаването на тези системи да се използват представените в Глава 2 робастни AMLI преобусловители за параболични задачи, дискретизирани с крайни елементи на Крозе-Равиар. Напомняме, че в този случай оценката за константата в усиленото неравенство на КБШ за DA разделяне е равномерно ограничена и не зависи от нивото на сгъстяване на мрежата, т.е. не зависи от мрежовия параметър, или мрежовата анизотропия на първоначалната мрежа.

Експериментите в Раздел 2.6 (вж. още [25]) показват, че FR методът за параболични задачи има по-добра сходимост от тази при използване на DA преобусловител. Оптималност на AMLI метода за DA преобуславяне се гарантира теоретично при стабилизация с полином от степен $\beta = 3$, но в дисертацията показваме, че на практика оптимален (или почти оптимален) ред на сходимост се наблюдават и за NLAMLI метод с $\beta = 2$, както за DA, така и за FR преобуславяне.

Проекционна стъпка:

На проекционната стъпка трябва да се реши система със седлова точка, получена чрез дискретизация на смесена задача като тази, разгледана в Глава 3.

Фигура 6: Поле на вихъра, $Re = 400$, $t = 20$



Матрицата на масата за крайни елементи на Крозе-Равиар е диагонална и изключването на неизвестните на скоростите може да се извърши точно, като по този начин локалната консервативност на дискретизацията се запазва. Редуцираната задача за неизвестните на налягането има симетрична и положително полуопределена матрица със структура на граф-лапласиан с тегла. В съставния алгоритъм за уравненията на Навие-Стокс използваме преобусловителя за системи от този вид, описан в Глава 3. Изведената там оценка за константата в усиленото неравенство на КБШ за предложеното йерархично разделяне на граф-лапласиан с тегла е в сила за равномерна мрежа от правоъгълни триъгълници.

Числен анализ на свойствата на предложения съставен алгоритъм е представен в Раздел 4.3. Разглеждаме задачата за течение, предизвикано от движение на безкраен капак по повърхността на контейнер пълен с флуид. В литература на английски език в областта на динамика на флуидите, тази задача е известна като lid-driven cavity flow. В дисертацията разглеждаме три случая на число на Рейнолдс, $Re = 100$, $Re = 400$ и $Re = 1000$.

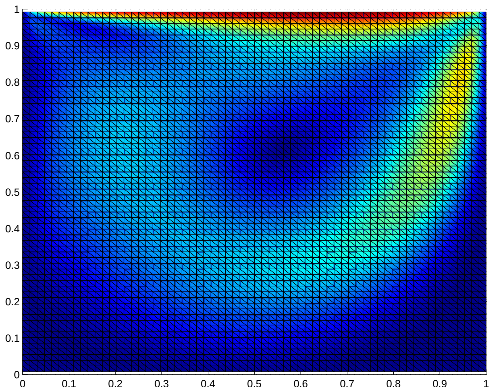
Целта на проведените експерименти е да се анализира сходимостта на многонивовите методи, приложени при решаване на системите за двете компоненти на скоростта и системата за налягането в рамките на съставния алгоритъм. При решаването на параболичните задачи използваме NLAMLI алгоритъм със стабилизация с $\beta = 2$ вътрешни итерации и FR преобусловител. В този случай за приближено решаване на системите с водещите диагонални блокове използваме три вътрешни итерации с метод на спрегнатия градиент с описания в Раздел 2.3 преобусловител. За задачата за налягането прилагаме метод на спрегнатия градиент с многонивов преобусловител за граф-лапласиани, основан на разделянето, предложено в Раздел 3.3, и стабилизация с полином от втора степен. Полиномът P_ν, с който апроксимираме обратните матрици на водещите диагонални блокове в йерархичното разделяне на тази стъпка, е от трета степен.

В съответствие с теоретичните оценки, при решаването на параболичните

Бр. рафинирания ℓ	$IT(\widehat{\mathbf{u}}_1)$	$IT(\widehat{\mathbf{u}}_2)$	$IT(\mathbf{p})$
	Ср. бр. итерации, отн. грешка 10^{-9}		
1	4	3.96	16.52
2	5	4.95	17.97
3	7	6.93	18.07
4	8.96	7.92	18.25

Таблица 1: Поведение на съставния многонивов метод, $Re = 400$

Фигура 7: Норма на векторите от полето на скоростите, $Re = 400$, $t = 20$



Бр. рафинирания ℓ	$IT(\widehat{\mathbf{u}_1})$	$IT(\widehat{\mathbf{u}}_2)$	$IT(\mathbf{p})$
	Ср. бр. итерации, отн. грешка 10^{-9}		
1	3	2.97	16.52
2	4	3.96	17.93
3	5.97	4.95	18.02
4	7.07	6.93	18.26

Таблица 2: Поведение на съставния многонивов метод, $Re = 1000$

задачите прилагането на $\beta = 2$ вътрешни итерации в NLAMLI алгоритъма не осигурява пълна стабилизация на общия брой итерации, вж. колони $IT(\widehat{\mathbf{u}}_1)$ и $IT(\widehat{\mathbf{u}}_2)$ в Таблици 1-2. Въпреки това, разликата в сходимостта за различни размерности на задачата е незначителна, като броя на итерациите се увеличава с не повече от две за последователни нива на рафиниране. Ето защо използването на $\beta = 2$ в NLAMLI метода, вместо изчислително по-скъпия случай $\beta = 3$, е оправдано. Броят итерации при решаване на параболичните задачи е по-малък при по-големи числа на Рейнолдс. Обяснение на този факт е по-силната диагонална доминация на съответните матрици. Средният брой итерации $IT(\mathbf{p})$, необходими за постигане на желаната точност при решаването на системата на проекционната стъпка в съставния алгоритъм, са повече от итерациите на конвективно-дифузионната стъпка. Трябва да отбележим, обаче, че размерността на системите за налягането е по-малка от размерността на системите за скоростите. Броят на итерациите при решаването на задачата за налягането, както и наблюдаваната в този случай стабилизация, съответстват на теоретичните и числени резултати в Глава 3.

Получените резултати за приближеното решение на уравненията на Навие-Стокс в случая на $Re = 400$ са илюстрирани чрез Фигури 5 – 7. На Фигура 5 е показано скалираното векторно поле за различни стъпки по времето, с цел да се демонстрира изменението на профила на течението. При $t = 5$ се наблюдава завихряне в левия долен ъгъл на контейнера. При $t = 10$ в десния долен ъгъл се оформя още един вихър , който се доразвива при $t = 15$ и $t = 20$. На Фигура 6 е представена друга визуализация на течението при $t = 20$, този път чрез полето на вихъра. Стойностите на нормата на векторите от полето на скоростите на последната стъпка по времето са показани на Фигура 7. Както се вижда, скоростта е най-голяма близо до капака.

Авторска справка

Основните научни приноси на настоящата дисертация са:

1. Изследван е многонивов метод за двумерни линейни параболични задачи, дискретизирани с неконформни крайни елементи на Крозе-Равиар. Получена е нова равномерна оценка за константата в усиленото неравенство на Коши-Буняковски-Шварц за йерархично разделяне чрез DA метод за матрицата на масата. Направено е обобщение на получения резултат и са предложени два подхода за конструиране на оптимални многонивови преобусловители основани на DA разделяне на матрицата на дискретизираната параболична задача.

2. Получена е характеризация на робастни многонивови методи за параболични задачи, дискретизирани с конформни елементи на Курант и неконформни елементи на Крозе-Равиар. Изследвано е влиянието на мрежовата анизотропия върху качествата на съответните йерархични разделяния.

3. Разгледан е подход за решаване на системи, получени при дискретизация с неконформни крайни елементи на елиптични задачи в смесена форма. Подходът свежда задачата до система с матрица със структура на граф-лапласиан с тегла. Предложено е йерархично разделяне за такъв тип задачи, основано на специално дефинирани макроелементи, асоциирани със страни на триъгълници от груба мрежа. Получена е равномерна оценка за константата на КБШ в случая на равномерна триангулация с правоъгълни елементи.

4. Разработена е полиномиална апроксимация за симетрични положително определени матрици с помощта на полинома на най-добро приближение

на x^{-1} в L_∞ норма в краен интервал. Изведена е оценка за относителното число на обусловеност на така получения преобусловител. Подходът е приложен за апроксимиране на водещите диагонални блокове в многонивова факторизация на граф-лапласиани с тегла. Изследвани са свойствата на получения многонивов метод в случая на равномерна триангулация с правоъгълни елементи.

5. Предложен е оптимален съставен многонивов метод за решаване на нестационарните уравнения на Навие-Стокс за случая на устойчива, локално консервативна дискретизация с неконформни крайни елементи. Методът се основава на многонивово преобуславяне на системите, възникващи на конвективно-дифузионната и проекционна стъпки в проекционен метод.

6. Програмно са реализирани изследваните методи и алгоритми. Проведените числени експерименти потвърждават тяхната изчислителна ефективност за важни класове задачи с голяма размерност.

Благодарности

Поднасям най-сърдечна благодарност на научния си ръководител проф. дмн Светозар Маргенов за постоянното внимание, съдействието, както и ползотворната съвместна работа по разработваните теми.

Дълбоко съм благодарна на доц. Мая Нейчева, д-р Иван Георгиев, д-р Johannes Kraus, проф. Людмил Зикатанов и проф. Петър Минев за оказаната помощ и полезните дискусии на различни етапи от работата по дисертацията. Също така благодаря и на колегите от ИИКТ-БАН за подкрепата и стимулиращата творческа атмосфера.

Благодарна съм за оказаната подкрепа в рамките на цитираните научни проекти ДО02-115/2008, ДО02-147/2008, ДО02-338/2008 и VU-MI-202/2006 към фонд "Научни изследвания"и Finite element preconditioners for algebraic problems as arising in modelling of multiphase microstructures към Swedish Research Council.

Изказвам специални благодарности на семейството си за постоянната подкрепа. Работата по дисертацията посвещавам на баща си.

Литература

[1] Б. Боянов, *Лекции по числени методи*, Дарба, 1995.

[2] Бл. Сендов, В. Попов, *Числени методи I, II,* София, „Наука и изкуство“, 1978.

[3] Г. Стренг, Дж. Фикс, *Теория метода конечных элементов,* Москва, „Мир“, 1977.

[4] D. N. Arnold, F. Brezzi, *Mixed and nonconforming finite element methods: implementation, postprocessing and error estimates*, RAIRO, Model. Math. Anal. Numer., **19** (1985), 7–32.

[5] B. Ayuso de Dios and L. Zikatanov, *Uniformly convergent iterative methods for discontinuous Galerkin discretizations*, SIAM J. Sci. Comput. **40** (2009), 4-36.

[6] O. Axelsson, *A Generalized Conjugate Gradient, Least Square Method*, Numer. Math. 51 (1987), pp. 209–227.

[7] O. Axelsson, *Iterative solution methods,* Cambridge, University press, 1994.

[8] O. Axelsson, *Stabilization of algebraic multilevel iteration methods; additive methods*, Numerical Algorithms **21** (1999), 23–47.

[9] O. Axelsson, V. Barker, *Finite element solution of boundary value problems: Theory and computations*, Academic Press, 1983.

[10] O. Axelsson, R. Blaheta, M. Neytcheva, *A black-box generalized conjugate gradient minimum residual method based on variable preconditioners and local element approximations*, TR 2007-033, Institute for Information Technology, Uppsala University, 2007.

[11] O. Axelsson and I. Gustafsson, *Preconditioning and two-level multigrid methods of arbitrary degree of approximations*, Math. Comp. **40** (1983), 219–242.

[12] O. Axelsson, S. Margenov, *On multilevel preconditioners which are optimal with respect to both problem and discretization parameters*, Computational Methods in Applied Mathematics, **3(1)** (2003), 6–22.

[13] O. Axelsson and M. Neytcheva, *Algebraic multilevel iterations for Stieltjes matrices*, Num. Lin. Alg. Appl. **1** (1994), 213–236.

[14] O. Axelsson, M. Neytcheva, *Preconditioned methods for linear systems arising in constrained optimization problems*, Numer. Linear Algebra Appl. **10** (2003) 3–31.

[15] O. Axelsson and A. Padiy, *On the additive version of the algebraic multilevel iteration method for anisotropic elliptic problems*, SIAM J. Sci. Comput. **20** (1999), 1807–1830.

[16] O. Axelsson and P.S. Vassilevski, *Algebraic multilevel preconditioning methods I*, Numer. Math. **56** (1989), 157–177.

[17] O. Axelsson, P.S. Vassilevski, *Algebraic multilevel preconditioning methods II*, SIAM J. Numer. Anal., **27** (1990), 1569-1590.

[18] O. Axelsson and P.S. Vassilevski, *A black box generalized conjugate gradient solver with inner iterations and variable-step preconditioning*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **12** (1991), 625–644.

[19] O. Axelsson and P.S. Vassilevski, *Variable-step multilevel preconditioning methods, I: Self-adjoint and positive definite elliptic problems*, Num. Lin. Alg. Appl. 1 (1994), pp. 75–101.

[20] R. Bank and T. Dupont, *An optimal order process for solving finite element equations*, Math. Comp. **36** (1981), 427–458.

[21] B. Bejanov, J. Guermond and P. Minev, *A locally* div*-free projection scheme for incompressible flows based on non-conforming finite elements*, Int. J. Numer. Meth. Fluids, **49**, 2005, 239-258.

[22] G. Bencheva, I. Georgiev, S. Margenov, *Two-lewel preconditioning of Crouzeix-Raviart anisotropic FEM systems*, Large-Scale Scientific Computing, Springer LNCS, **2907** (2004), 76–84.

[23] R. Blaheta, S. Margenov, M. Neytcheva, *Uniform estimate of the constant in the strengthened CBS inequality for anisotropic non-conforming FEM systems*, Numer. Linear Algebra Appl., **11** (2004), 309–326.

[24] R. Blaheta, S. Margenov, M. Neytcheva, *Robust optimal multilevel preconditioners for non-conforming finite element systems*, Numer. Lin. Alg. Appl., **12(5-6)** (2005), 495–514.

[25] P. Boyanova, S. Margenov, M. Neytcheva, *Robust AMLI Methods for Parabolic Crouzeix-Raviart FEM Systems*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **235(2)** (2010), 380–390.

[26] D. Braess, *Finite Elements: Theory, Fast Solvers, and Applications in Solid Mechanics*. Cambridge University Press, 2001, Second Edition.

[27] J. Bramble, *Multigrid methods*, Longman Scientific & Technical, 1993.

[28] S. Brenner, L. Scott, *The mathematical theory of finite element methods*, Springer-Verlag, 1994.

[29] F. Brezzi, M. Fortin, *Mixed and hybrid finite element methods*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1991.

[30] A.J. Chorin, *Numerical solution of the Navier–Stokes equations*, Mathematics of Computation 1968; 22:745 –762.

[31] M. Crouzeix, P.-A. Raviart, *Conforming and non-conforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations*, RAIRO Anal. Numér. **7 R-3** (1973), 33–76.

[32] V. Eijkhout, P. Vassilevski, *The role of the strengthened Cauchy-Bunyakowski-Schwarz inequality in multilevel methods*, SIAM Review **33** (1991), 405–419.

[33] R. Fedorenko, *On a relaxation method for solving discrete elliptic equations*, J. Comp. Math. and Math. Phys., 1-5 (1961), 922–927.

[34] I. Georgiev, J. Kraus, S. Margenov, *Multilevel preconditioning of 2D Rannacher-Turek FE problems; additive and multiplicative methods*, pp. 56–64. Springer LNCS *4310*, 2007.

[35] I. Georgiev, J. Kraus, S. Margenov, *Multilevel preconditioning of rotated bilinear non-conforming FEM problems*, Comput. Math. Appl. **55** (2008), 2280–2294.

[36] V. Girault, P.-A. Raviart, *Finite Element Methods for Navier–Stokes Equations*, Springer Series in Computational Mathematics (Theory and Algorithms). Springer, Berlin, 1986.

[37] G.H. Golub and C.F. van Loan, *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, 1989.

[38] W. Hackbusch, *Multi-Grid Methods and Applications*, Springer-Verlag, 1985.

[39] X. He, M. Neytcheva, S. Serra Capizzano, *On an augmented Lagrangian-based preconditioning of Oseen type problems* , BIT Numerical Mathematics, DOI: 10.1007/s10543-011-0334-4.

[40] J. Kraus, *An algebraic preconditioning method for M-matrices: Linear versus nonlinear multilevel iteration*, Num. Lin. Alg. Appl. **9** (2002), 599–618.

[41] J. Kraus and S. Margenov, *Multilevel methods for anisotropic elliptic problems*, Lectures on Advanced Computational Methods in Mechanics, Radon Series Comp. Appl. Math., **1** (2007), 47–87.

[42] J. Kraus, S. Margenov, *Robust Algebraic Multilevel Methods and Algorithms*, Radon Series on Computational and Applied Mathematics, 5, de Gruyter, 2009.

[43] J. Kraus, S. Margenov and J. Synka, *On the multilevel preconditioning of Crouzeix-Raviart elliptic problems*, Num. Lin. Alg. Appl., *15* (2008), 395–416.

[44] J. Kraus, V. Pillwein, and L. Zikatanov, *Algebraic multilevel iteration methods and the best approximation to 1/x in the uniform norm*, RICAM-Report No. 2009-17.

[45] J. Kraus and S. Tomar, *A multilevel method for discontinuous Galerkin approximation of three-dimensional anisotropic elliptic problems*, Num. Lin. Alg. Appl. **15** (2008), 417–438.

[46] J. Kraus and S. Tomar, *Multilevel preconditioning of elliptic problems discretized by a class of discontinuous Galerkin methods*, SIAM J. Sci. Comput. 30 (2008), pp. 684–706.

[47] R. Lazarov and S. Margenov, *CBS constants for multilevel splitting of graph-Laplacian and application to preconditioning of discontinuous Galerkin systems*, J. Complexity, **23(4-6)** (2007), 498-515.

[48] R. Lazarov, P.S. Vassilevski, and S. Margenov, *Solving elliptic problems by the domain decomposition method using precondition matrices derived by multilevel splitting of finite element matrix*, Proceedings of the 1st Int. Conf. on Supercomputing (Greece) (1987), 826–835.

[49] J. F. Maitre and F. Musy, *The contraction number of a class of two-level methods; an exact evaluation for some finite element subspaces and model problems*, Lect. Notes Math. **960** (1982), 535–54.

[50] S. Margenov and J. Synka, *Generalized aggregation-based multilevel preconditioning of Crouzeix-Raviart FEM elliptic problems*, RICAM, Report, Linz, 2006. No. 2006-23.

[51] Y. Notay, *Flexible conjugate gradients*, SIAM J. Sci. Comput. 22 (2000), pp. 1444–1460.

[52] Y. Saad, *Iterative methods for sparse linear systems*, PWS Publishing Company, Boston, 1996.

[53] R. Temam, *Sur l'approximation de la solution des équations de Navier–Stokes par la méthode des pas fractionnaires ii*, Archive for Rational Mechanics and Analysis 1969; 33:377–385.

[54] P.S. Vassilevski, *On two ways of stabilizing the hierarchical basis multilevel methods*, Siam Review **39** (1997), 18–53.

[55] P.S. Vassilevski, *Multilevel Block Factorization Preconditioners: Matrix-based Analysis and Algorithms for Solving Finite Element Equations*, Springer, 2008.

Abstracts of Dissertations

Number 2, 2012

INSTITUTE OF INFORMATION AND COMMUNICATION TECHNOLOGIES

BULGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ

ИНСТИТУТ ПО ИНФОРМАЦИОННИ И КОМУНИКАЦИОННИ ТЕХНОЛОГИИ

Брой 2, 2012

Автореферати на дисертации